

# 简况

## 比赛链接

AC 5题 , Rank 19th

# 总结与反思

## cmx

## lpy

## xsy

# 题解

## D

$P^T A P = D, D \in \text{diag}(n)$

$x^T A x = y^T D y, y = P^{-1} x, x = P y$ , 利用合同变换求解  $P, D$

原问题变为:

$$\begin{gather*} \max: b^T P \quad \text{s.t.:} \sum_{i=1}^N e_i y_i^2 \leq 1, e_i \text{ 为 } D \text{ 对角元} \end{gather*}$$

$b^T P = d, (\sum_{i=1}^N d_i y_i)^2 \leq$

$(\sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{e_i}) (\sum_{i=1}^N e_i y_i^2)$

考虑几何意义:高维椭圆也可以求解

更一般的是利用Lagrange对偶与KKT条件

$L(x, \lambda) = x^T b b^T x + \lambda(x^T A x - 1), \lambda \geq 0$ , 显然  $L(x, \lambda) \leq x^T b b^T x$

由KKT条件,取得极值时,  $\nabla_x L = 0, \lambda(x^T A x - 1) = 0$

$2 b b^T x + 2 \lambda A x = 0, x^T A x = 1$

$x^T b b^T x = -\lambda, (b b^T + \lambda A) = 0$

$x^T b b^T x = b^T A^{-1} b$

by Hardict

## F

\$水题，取3倍maxlen比较，据说2倍就行，不会证明\$

by Hardict

## I. 1 or 2

I是我认为相当精彩的一道题。赛场上是用了一个网络流假算法，结果因为数据太水侥幸通过。

首先 $d=1$  or  $d=2$ 意味着残存图是由线段和环组成的。网络流/费用流的想法其实在这题来说相当自然。我赛场上的想法是每个点拆出入两点，源点连向左奇数点，右奇数点连向汇点，再按照读入的边，左往右连边。最后 $d=2$ 的点右往左连 $cap=2$ 的边。到达一个点的边被赋予 $-1$ 的费用。我以为只要求出最小费用最大流，一单位流就可以代表了线段，费用取反，看和度数之和是否相等，就能判断了。

事实上这个想法漏洞百出，首先根本没有解决好 $d=2$ 成环的问题。另外仔细想想，如果一条流量路径从 $a$ 到 $b$ 那么反映在网络上就是有左 $a$ 到右 $b$ 的一条路径，那么一定就意味着有左 $b$ 到右边 $a$ 的一条流量吗？恰恰是不一定的，有可能最大流的对应的图是不对称的。利用三点环，每个点的 $d$ 为1，就可以否定了（当然赛场上特判了这类奇数个 $d=1$ 的情况，不过也会有其他反例）。

另外一种比较简单的构图，是直接源点连左边，右边连汇点 $cap=$ 度数。这样的话也是这样，虽然原图是对称的，可能最大流对应的图是不对称的（情况不多，所以大概都没被卡掉）。

接下来介绍一下正解。

首先，如果所有 $d=1$ 那么相当于求一个一般图的最大匹配，看是否和总点数相等。这里有一个现成的，我没学过的带花树算法。那么存在 $d=2$ 的点怎么处理呢？

我们把 $d=2$ 的点拆分成两个点，同时对于哪些两头都是 $d=2$ 的点 $(x,y)$ 的边，引入点 $e$ 和 $e'$

引入边 $(x, e) (x', e) (y, e') (y', e') (e, e')$

对于一头是 $d=1(x)$ ，一头是 $d=2(y)$ 的边

引入边 $(x,y')(x,y)$

如果都是 $d=1$ 则直接连。

这样构造出来的新图，我们在上面跑一般图的最大匹配，看是否每个点都参与匹配，即可。

真的是一种很神仙的构图方式，对于 $(x, e) (x', e)(y, e') (y', e')(e, e')$ 五条边，如果 $e$ 和 $e'$ 匹配，对应该边没有残存图中。反之 $e$ 和 $e'$ 和两头各自的点匹配，对应该边在残存图中。其他的 $d=1$ 点和 $d=2$ 点的匹配之类，也都能在原图上找到完全对应的连接方式。

而如果不是完全匹配，那么对应在原图也就找不到方案。

感觉这个构图，真的很神仙，可以当做一种特别的技巧记住。

以后这类问题，基本都是带花树算法，千千万万不要往网络流的巨坑里面走。一定要仔细思考！

by cmx

# J

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^n (1-x)^n dx &\xrightarrow{\text{分部积分}} \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-x)^n dx \\
 \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{n-1} dx &= \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx \\
 \int_0^1 x^{2n} dx &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}
 \end{aligned}$$

不过这好像是和 $\gamma$ 函数相关，有直接的结论

by Hardict

# 补题

## H

发现每个 $\frac{1}{k}$ 为一个分界点

$\frac{1}{k} \leq \text{cap} < \frac{1}{k+1}$ 则需要走最优的 $k+1$ 条路径

比赛中我每次扩容后求出了所有最优路径并算前缀和,但一直TLE

后发现不用计算具体路径，保留每次扩容最小费用就行，只要按从扩容顺序选取，那路径一定存在(不按顺序可能矛盾)

by Hardict

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:2020\\_nowcoder\\_multiuniversity\\_1&rev=1594904964](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:2020_nowcoder_multiuniversity_1&rev=1594904964)

Last update: 2020/07/16 21:09