简况

比赛链接

AC 5题，Rank 19th

总结与反思

cmx

lpy

xsy

题解

D

$P^{T}AP=D,D \in diag(n)
x^{T}Ax=y^{T}Dy,y=P^{-1}x,x=Py,利用合同变换求解P,D\\
原问题变为:\\
\begin{gather*} & \max:b^{T}P &\\ & s.t:\sum_{i=1}^{N}e_{i}y_{i}^{2}\leq 1,e_{i}为D对角元 &\\
\end{gather*}
b^{T}P=d,(\sum_{i=1}^{N}d_{i}y_{i})^{2} \leq
(\sum_{i=1}^{N}\frac{d_{i}^{2}}{e_{i}})(\sum_{i=1}^{N}e_{i}y_{i}^{2})$

考虑几何意义:高维椭圆也可以求解

更一般的是利用Lagrange对偶与KKT条件

$L(x,\lambda)=x^{T}bb^{T}x+\lambda(x^{T}Ax-1),\lambda \geq 0, 显然L(x,\lambda) \leq
x^{T}bb^{T}x\\
由KKT条件,取得极值时,\nabla_{x} L=0,\lambda(x^{T}Ax-1)=0\\
2bb^{T}x+2\lambda Ax=0,x^{T}Ax=1\\
x^{T}bb^{T}x = -\lambda,(bb^{T}+\lambda A)=0\\
x^{T}bb^{T}x=b^{T}A^{-1}b$

by Hardict

F

$水题,取3倍maxlen比较,据说2倍就行,不会证明$

by Hardict

I. 1 or 2

I是我认为相当精彩的一道题。赛场上是用了一个网络流假算法，结果因为数据太水侥幸通过。

首先d=1 or d=2意味着残存图是由线段和环组成的。网络流/费用流的想法其实在这题来说相当自然。我赛场上的想法是每个点拆出入两点，源点连向左奇数点，右奇数点连向汇点，再按照读入的边，左往右连边。最后d=2的点右往左连cap=2的边。到达一个点的边被赋予-1的费用。我以为只要求出最小费用最大流，一单位流就可以代表了线段，费用取反，看和度数之和是否相等，就能判断了。

事实上这个想法漏洞百出，首先根本没有解决好d=2成环的问题。另外仔细想想，如果一条流量路径从a到b□那么反映在网络上就是有左a到右b的一条路径，那么一定就意味着有左b到右边a的一条流量吗？恰恰是不一定的，有可能最大流的对应的图是不对称的。利用三点环，每个点的d为1，就可以否定了（当然赛场上特判了这类奇数个d=1的情况，不过也会有其他反例）。

另外一种比较简单的构图，是直接源点连左边，右边连汇点□cap=度数。这种的话也是这样，虽然原图是对称的，可能最大流对应的图是不对称的（情况不多，所以大概都没被卡掉）。

接下来介绍一下正解。

首先，如果所有d=1□那么相当于求一个一般图的最大匹配，看是否和总点数相等。这里有一个现成的，我没学过的带花树算法。那么存在d=2的点怎么处理呢？

我们把d=2的点拆分成两个点，同时对于哪些两头都是d=2的点□x,y□的边，引入点e和e'

引入边□ (x, e) (x', e) (y, e') (y', e') (e, e')

对于一头是d=1□x□,一头是d=2(y)的边

引入边 (x,y')(x,y)

如果都是d=1□则直接连。

这样构造出来的新图，我们在上面跑一般图的最大匹配，看是否每个点都参与匹配，即可。

真的是一种很神仙的构图方式，对于(x, e) (x', e)(y, e') (y', e')(e, e')五条边，如果e和e'匹配，对应该边没有在残图中。反之□e和e'和两头各自的点匹配，对应该边在残图中。其他的d=1点和d=2点的匹配之类，也都能在原图上找到完全对应的连接方式。

而如果不是完全匹配，那么对应在原图也就找不到方案。

感觉这个构图，真的很神仙，可以当做一种特别的技巧记住。

以后这类问题，基本都是带花树算法，千千万万不要往网络流的巨坑里面走。一定要仔细思考！

by cmx

J

$I_{n}=\int_{0}^{1}x^{n}(1-x)^{n}dx \xrightarrow{分部积分} \frac{1}{n+1}\int_{0}^{1}(1-x)^{n}dx^{n+1}=\frac{n}{n+1}\int_{0}^{1}x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx\\ =\frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!}}\int_{0}^{1}x^{2n}dx=\frac{(n!)^{2}}{(2n+1)!}$

不过这好像是和$gamma$函数相关，有直接的结论

by Hardict

补题

H

发现每个$\frac{1}{k}$为一个分界点

$\frac{1}{k} \leq cap < \frac{1}{k+1}$则需要走最优的$k+1$条路径

比赛中我每次扩容后求出了所有最优路径并算前缀和,但一直TLE

后发现不用计算具体路径，保留每次扩容最小费用就行，只要按从扩容顺序选取，那路径一定存在(不按顺序可能矛盾)

by Hardict