

## 递推

令  $f_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k$

$$\begin{aligned} f_{k+1}(n+1) &= f_{k+1}(n) + (n+1)^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n (i+1)^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^n i^j \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f_i(n) \\ &= 1 + f_{k+1}(n) + (k+1)f_k(n) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} f_i(n) \end{aligned}$$

得到了:  $(k+1)f_k(n) = (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} f_i(n)$

可以写成:  $f_{k-1}(n) = \frac{(n+1)^k - 1}{k} - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} f_i(n)$

## 拉格朗日插值法

对于  $\sum_{i=1}^n i^k = f[n][k]$  具体表达是一个  $k+1$  次多项式, 我们求解  $f[0 \sim k+1][k]$  然后进行插值即可

对于具体计算  $f[n] = \sum_{i=0}^{k+1} f[i] \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{k+1} (n-j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{k+1} (i-j)}$

$\prod_{j=1, j \neq i}^{k+1} (n-j) = \prod_{j=1}^{i-1} (n-j) \prod_{j=i+1}^{k+1} (n-j)$  是前缀积  $\times$  后缀积

$\prod_{j=0, j \neq i}^{k+1} (i-j) = i!(k+1-i)!(-1)^{k+1-i}$

于是, 可以  $O(k)$  预处理  $f[i]$  以及阶乘, 前后缀然后  $O(k)$  计算

这种方法对不同  $f[n]$  计算速度一样, 而针对多次询问则需要利用生成函数计算伯努利数

## 伯努利数以及生成函数

$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}$

可以利用:  $B_0 = 1, \sum_{i=0}^n B_i \binom{n+1}{i} = 0 \Rightarrow B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_i \binom{n+1}{i}$  计算

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} B_i \binom{n}{i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^n B_i \binom{n}{i} &= B_n \quad (n > 1) \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} B_i &= \frac{B_n}{n!} \quad (n > 1) \end{aligned}$$

考虑  $C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i$   
有  $e^x C(x) = C(x) + x \text{quad}$  (加  $x$  是因为  $n > 1$  导致第一项缺失, 而  $n = 0$  时上述等式也是成立的)  
得到关于  $\frac{B_n}{n!}$  的生成函数  $\frac{x}{e^x - 1}$


故可以利用递推  $O(n^2)$  或利用 NTT  $O(n \log n)$  预处理

伯努利数与自然数幂和关系为

$$f_{k}(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^k \\ = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}$$

\$ 考虑  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n-1} i^k) \frac{x^k}{k!}$   
 $F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{i=0}^{n-1} e^{ix} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:hardict:powersum&rev=1588992550> 

Last update: 2020/05/09 10:49