

二次剩余(QRP)

Cipolla算法(素数情况下)

[wiki百科](#)

对于 $x^2 \equiv a \pmod{p}$

可以随机找一个数 $s, \text{ s.t. } (\frac{s^2-a}{p}) = -1$, 即 s 不是 p 的二次剩余, 可以知道找到 s 的期望次数为 2

考虑 $\mathbb{Z}(w = \sqrt{s^2 - a}) = \{j + kw\}$ 以及如下定理

- $w^p = w(w^2)^{\frac{p-1}{2}} = w(s^2 - a)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -w \pmod{p}$
- $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

解为 $x \equiv (s+w)^{\frac{p+1}{2}}$:

$$(s+w)^{p+1} = (s+w)^p (s+w) \equiv (s^p + w^p)(s+w) \equiv (s-w)(s+w) = (s^2 - w^2) = a \pmod{p}$$

三次剩余

$$x^3 \equiv a \pmod{p}$$

如果 $a=0, p \leq 3$ 考虑特判

$p=3k+2, x \equiv a^{\frac{2p-1}{3}}$ 且为唯一解

若不为唯一解, 则说明其有 3 次单位根 $1, \alpha, \alpha^2$, 故每种解三个一组, 而 $3 \nmid p-1$ 矛盾

$p=3k+1$, 其有 3 次单位根, 且可能无解

先利用 $a^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$ 判断有无解

找到 $b^3 \equiv a \pmod{p}$, 则解为 $b, b\alpha, b\alpha^2$

类比二次剩余 Cipolla 算法, 设 a 的根为 $\theta \neq a$

$C = \{y = j + k\theta + l\theta^2\}$, C 与 $\mathbb{Z}_{p^3}$ 同构, $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

随机生成 j, k, l 得到 $y = j + k\theta + l\theta^2$

$$z \equiv y^{\frac{p-1}{3}} \pmod{p}, z^3 \equiv 1 \pmod{p}$$

若 z 仅含一次项 $(k\theta)^3 \equiv 1 \pmod{p}$, 取 $x \equiv (k\theta)^{-1} \pmod{p}$ 即为一个解

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:hardict:grp>



Last update: **2020/05/16 16:13**