

二次剩余(QRP)

Cipolla算法(素数情况下)

[wiki百科](#)

对于 $x^2 \equiv a \pmod{p}$

可以随机找一个数 s , $\text{s.t.} (\frac{s^2 - a}{p}) = -1$, 即 s 不是 p 的二次剩余, 可以知道找到 s 的期望次数为 2

考虑 $\mathbb{Z}(w = \sqrt{s^2 - a}) = \{j + kw\}$ 以及如下定理

- 普通列表项目 $w^p = w(w^2)^{\frac{p-1}{2}} = w(s^2 - a)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -w \pmod{p}$
- 普通列表项目 $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

解为 $x \equiv (s+w)^{\frac{p+1}{2}}$:

$$(s+w)^{p+1} = (s+w)^p (s+w) \equiv (s^p + w^p)(s+w) \equiv (s-w)(s+w) = (s^2 - w^2) \equiv a \pmod{p}$$

三次剩余

$$x^3 \equiv a \pmod{p}$$

如果 $a=0, p \leq 3$ 考虑特判

$$p=3k+2, x \equiv a^{\frac{2p-1}{3}} \text{ 且为唯一解}$$

若不为唯一解, 则说明其有 3 次单位根 $1, \alpha, \alpha^2$, 故每种解三个一组, 而 $3 \nmid p-1$ 矛盾

$$p=3k+1, \text{ 其有 3 次单位根, 且可能无解}$$

先利用 $a^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$ 判断有无解

$$\text{找到 } b^3 \equiv a \pmod{p}, \text{ 则解为 } b, b\alpha, b\alpha^2$$

类比二次剩余 Cipolla 算法, 设 a 的根为 $\theta \neq a$

$$C = \{j + k\theta + l\theta^2\}, \text{ 随机生成 } j, k, l \text{ 得到 } y = j + k\theta + l\theta^2$$

$$z \equiv y^{\frac{p-1}{3}} \pmod{p}, z^3 \equiv 1 \pmod{p}$$

Last update: 2020-2021:teams:alchemist:hardict:grp <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:hardict:grp&rev=1589616549>
2020/05/16 16:09

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:hardict:grp&rev=1589616549> 

Last update: **2020/05/16 16:09**