

霍尔定理

设二分图的两部分为 X 和 Y 且 $|X| \leq |Y|$

则定理描述为：二分图存在完美匹配，等价于对于 X 的任意子集 X' 与它们中任意点相连的 Y 的结点个数 $\geq |X'|$

[gym102268D Dates](#)

题意:

给你一张二分图，左边有 t 个位置，右边有 n 个带权点，第 i 个点与 $[l_i, r_i]$ 所有点连边，匹配的值为匹配中右边点的权值和，求最大权匹配。

其中 $1 \leq n, t \leq 3 \times 10^5, l_i \leq l_{i+1}, r_i \leq r_{i+1}$

题解:

将右边的点按照权值从大到小排序，依次加入查看有无完美匹配，有就选择否则跳过。按照我个人的理解，如果让一个权值更小的替换了当前某个已经选择的某个点，匹配数不会变多，答案也不会变优。

于是，问题转化成了如何判定是否存在完全匹配，这就用到了霍尔定理，考虑右边的点中被选择的那些，选择其一个子集，判断是否所有子集的邻域（即与其相邻的点构成的集合）大小都比子集本身大。

如果我们选择的子集对应的区间是不连续的，霍尔定理的条件成立等价于对于断点两边分别成立，所以只考虑选取的子集对应的区间连续的情况。

又因为 $l_i \leq l_{i+1}, r_i \leq r_{i+1}$ 也就是说只需要考虑选择的子集的编号连续的情况，即

$\forall 1 \leq i < j \leq n, [i, j] \text{ 中被选择的右侧点个数} \leq [l_i, r_j] \text{ 中左侧点数量}$

令 $pre[i]$ 为 $a[i]$ 的前缀和 $p[i]$ 表示 $[1, i]$ 中已经被选择的右侧点的个数，公式等价于：

$\forall 1 \leq i < j \leq n, p[j] - p[i-1] \leq pre[r_j] - pre[l_i-1]$

即:

$\forall 1 \leq i < j \leq n, pre[l_i-1] - p[i-1] \leq pre[r_j] - p[j]$

于是可以对每个位置维护一个 $pre[l_{i+1} - 1] - p[i]$ 和 $pre[r_i] - p[i]$ 注意此时 $i \in [0, n]$

其中 $pre[i]$ 是定值 $p[i]$ 可以用线段树轻松维护，每次插入时只需要前检查 $i < x$ 的 $pre[l_i-1] - p[i-1]$ 的最大值和 $i \geq x$ 的 $pre[r_i] - p[i]$ 的最小值的关系即可。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:mountvroom:halltheorem>

Last update: 2020/05/12 10:29