

# 霍尔定理

设二分图的两部分为  $X$  和  $Y$  且  $|X| \leq |Y|$

则定理描述为：二分图存在完美匹配，等价于对于  $X$  的任意子集  $X'$  与它们中任意点相连的  $Y$  的结点个数  $\geq |X'|$

[gym102268D Dates](#)

题意:

给你一张二分图，左边有  $t$  个位置，右边有  $n$  个带权点，第  $i$  个点与  $[l_i, r_i]$  所有点连边，匹配的值为匹配中右边点的权值和，求最大权匹配。

其中  $1 \leq n, t \leq 3 \times 10^5, l_i \leq l_{i+1}, r_i \leq r_{i+1}$

题解:

将右边的点按照权值从大到小排序，依次加入查看有无完美匹配，有就选择否则跳过。按照我个人的理解，如果让一个权值更小的替换了当前某个已经选择的某个点，匹配数不会变多，答案也不会变优。

于是，问题转化成了如何判定是否存在完全匹配，这就用到了霍尔定理，考虑右边的点中被选择的那些，选择其一个子集，判断是否所有子集的邻域（即与其相邻的点构成的集合）大小都比子集本身大。

如果我们选择的子集对应的区间是不连续的，霍尔定理的条件成立等价于对于断点两边分别成立，所以只用考虑选取的子集对应的区间连续的情况。

又因为  $l_i \leq l_{i+1}, r_i \leq r_{i+1}$  也就是说只需要考虑选择的子集的编号连续的情况，即

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, [i, j] \text{ 中被选择的右侧点个数} \leq [l_i, r_j] \text{ 中左侧点数量}$$

令  $pre[i]$  为  $a[i]$  的前缀和  $p[i]$  表示  $[1, i]$  中已经被选择的右侧点的个数，公式等价于：

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, p[j] - p[i-1] \leq pre[r_j] - pre[l_i - 1]$$

即:

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, pre[l_i - 1] - p[i-1] \leq pre[r_j] - p[j]$$

于是可以对每个位置维护一个  $pre[l_{i+1} - 1] - p[i]$  和  $pre[r_i] - p[i]$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:mountvoom:halltheorem&rev=1589250398>

Last update: 2020/05/12 10:26