

# 本周推荐

## 陈铭煊 Max.D.

### 子集卷积

#### 简介

一般我们有如下一类的状压dp方程，如 $dp[i] = \sum dp[j] * w[k]$  ( $i, j, k$  满足  $j \lor k = i, j \land k = 0$ ) 这里符号表示按位与和按位或。

如果暴力枚举位的子集，那么效率是 $3^n$ 的，难以承受。

实际上这个已经很接近一个FWT卷积的形式了，只不过是还要 $j \land k = 0$ 罢了。

我们改变这个条件为 $i$ 中1的个数 $+k$ 中1的个数 $=i$ 中1的个数，那么当我们为 $dp$ 增加一个“1的个数”的维度时，问题迎刃而解 $dp[cnt_i][i] = \sum_{(j|k)=i} dp[cnt_j][j] * w[cnt_i - cnt_j][k]$  注意这里 $cnt_i$ 表示1的个数，或者说子集中的物品数目。这里 $cnt_i$ 和 $i$ 的二进制1的个数如果不等，这个 $dp$ 或者 $w$ 值会置为0。此时只要我们从小到大枚举 $cnt$ 来做FWT就可以得到答案了，实际操作过程中，所有的 $dp$ 都是点值形式，因此得到新的 $dp[cnt_i]$ 只需要做 $cnt_i$ 次对位乘；最后，再将所有的 $dp$ 逆FWT变换回原值。

虽然牺牲了一定空间，但是时间被优化到了 $n$ 次FWT $+n^2$ 次对位乘法的复杂度 $O((2^n * n) * n + n^2 * 2^n) = O(n^2 * 2^n)$

#### 例题

模板题 <https://ac.nowcoder.com/acm/contest/5157/D>

很容易从题目的形式看出来实际上就是对四个数列求三重卷积，第一重是 $i|j$ 的子集卷积，第二重 $(i|j)+k$ 的FFT/NTT，第三重是 $(i|j)+k$ 的FWT的异或卷积。代码如下：

```
#include <bits/stdc++.h>

#define N 262144

using namespace std;

const int mod = 998244353, inv2 = 499122177;

int n;
int rev[N], lim, hib;
int A[N], B[N], C[N], D[N], popc[N];
int f[20][N], g[20][N], h[20][N];

inline int Add(int u, int v) { return (u += v) >= mod ? u - mod : u; }
```

```
inline void Inc(int &u, int v) { if ((u += v) >= mod) u -= mod; }

inline int fpm(int x, int y) {
    int r = 1;
    while (y) {
        if (y & 1) r = 1LL * x * r % mod;
        x = 1LL * x * x % mod, y >>= 1;
    }
    return r;
}

inline int read() {
    int x = 0;
    char ch = getchar();
    while (!isdigit(ch)) ch = getchar();
    while (isdigit(ch)) x = x * 10 + ch - '0', ch = getchar();
    return x;
}

void getrev(int len) {
    lim = 1, hib = -1;
    while (lim < len) lim <<= 1, ++hib;
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
        rev[i] = (rev[i >> 1] >> 1) | ((i & 1) << hib);
}

void fwtOr(int *a, bool type) {
    for (int mid = 1; mid < lim; mid <<= 1)
        for (int i = 0; i < lim; i += (mid << 1))
            for (int j = 0; j < mid; ++j)
                if (type) Inc(a[i + mid + j], a[i + j]);
                else Inc(a[i + mid + j], mod - a[i + j]);
}

void fwtXor(int *a, bool type) {
    static int x, y;
    for (int mid = 1; mid < n; mid <<= 1)
        for (int len = mid << 1, i = 0; i < n; i += len)
            for (int j = 0; j < mid; ++j) {
                x = a[i + j], y = a[i + mid + j];
                a[i + j] = Add(x, y), a[i + mid + j] = Add(x, mod - y);
                if (!type)
                    a[i + j] = 1LL * inv2 * a[i + j] % mod,
                    a[i + mid + j] = 1LL * inv2 * a[i + mid + j] %
mod;
            }
}

void NTT(int *a, bool type) {
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
```

```

    if (i < rev[i])
        swap(a[i], a[rev[i]]);
static int x, y;
for (int mid = 1; mid < lim; mid <= 1) {
    int len = mid << 1, wn = fpm(3, (mod - 1) / len);
    for (int i = 0; i < lim; i += len)
        for (int j = 0, w = 1; j < mid; ++j, w = 1LL * w * wn % mod) {
            x = a[i + j], y = 1LL * w * a[i + mid + j] % mod;
            a[i + j] = Add(x, y), a[i + mid + j] = Add(x, mod - y);
        }
}
if (!type) {
    reverse(a + 1, a + lim);
    int inv = fpm(lim, mod - 2);
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
        a[i] = 1LL * inv * a[i] % mod;
}
}

int main() {
    n = read(), ++n;
    getrev(n + n - 1);
    for (int i = 0; i < lim; ++i) popc[i] = popc[i >> 1] + (i & 1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) A[i] = read(), f[popc[i]][i] = A[i];
    for (int i = 0; i < n; ++i) B[i] = read(), g[popc[i]][i] = B[i];
    for (int i = 0; i < n; ++i) C[i] = read();
    for (int i = 0; i < n; ++i) D[i] = read();

    for (int i = 0; i <= 17; ++i)
        fwt0r(f[i], true), fwt0r(g[i], true);
    for (int sa = 0; sa <= 17; ++sa)
        for (int sb = 0; sb + sa <= 17; ++sb)
            for (int i = 0; i < lim; ++i)
                h[sa + sb][i] = (h[sa + sb][i] + 1LL * f[sa][i] * g[sb][i])
% mod;
    for (int i = 0; i <= 17; ++i)
        fwt0r(h[i], false);
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
        A[i] = h[popc[i]][i];

    NTT(A, true), NTT(C, true);
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
        A[i] = 1LL * A[i] * C[i] % mod;
    NTT(A, false);

    fwtXor(A, true), fwtXor(D, true);
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
        A[i] = 1LL * A[i] * D[i] % mod;
    fwtXor(A, false);

    int Q = read();

```

```
while (Q--) printf("%d\n", A[read()]);  
return 0;  
}
```

## 龙鹏宇 Hardict

### 统计数列中上升子序列个数

对应数列  $\{a_i\}_{i=1}^n$

考虑一个dp转移:  $f[n]=1+\sum_{1\leq i < n, a[i] < a[n]} f[i]$

可以利用数组数组解决,可是一般数列中会出现相同数,需要预先离散化

这里有一个技巧,假设数列长度为  $n$ ,可以令  $b[i]=(n+1)*a[i]+n-i$  排序后利用  $b[i]$  离散化即可得到严格上升下对应的  $rank$

若令  $b[i]=(n+1)*a[i]+i$  则可得到不严格上升的  $rank$

### 例题

#### 2015-2016 6th BSUIR Open Programming Contest. Semifinal A题

#### 题意:

给定数列  $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n, a_i \leq 10^9, b_i \leq 10^6$ , 求所有  $\{a_i\}_{i=1}^n$  上升子序列的下标对应的  $\{b_i\}_{i=1}^n$  的子序列gcd的和

#### 题解:

考虑满足新数列  $\{p\} = \{a_i : d | b_i\}$ , 求解  $\{p\}$  的上升子序列个数  $cnt_d$  再乘上容斥系数  $coef_d$

即可得到  $ans = \sum_{d=1}^{maxb} cnt_d \cdot coef_d, maxb = \max_{1 \leq i \leq n} b_i$

而对于容斥系数,考虑容斥过程

分析每一个  $d$  的实际贡献,其在  $e|d$  时都会被统计,对  $d$  单独进行容斥  $coef_d = \sum_{e|d} e \cdot \mu(\frac{d}{e})$

这里可以预处理所有非  $\mu$  进行预处理

还要预处理  $\{i : d | b_i\}$  进行优化

### 代码

# 肖思炆 MountVoom

## 其他

如何快速判断一段数字是一个 $1 \sim n$ 的排列：

给 $1 \sim n$ 随机一个hash值，如果这一段数字和异或和 $= 1 \sim n$ 的异或和，那么认为这段数字是一个排列。

## zzh的教诲

数组第二维不要开二的整次幂，会比较慢。

## 霍尔定理

[霍尔定理](#) (题目在补了在补了qwq)

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:weekly\\_digest\\_1&rev=1588999802](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:alchemist:weekly_digest_1&rev=1588999802)

Last update: **2020/05/09 12:50**