

2020牛客暑期多校训练营（第一场）

比赛网址

训练结果

- 时间:2020.7.12 12:00~17:00
- rank:43/1116
- 完成情况：4/6/11

题解

题目名字

题意

题解

B.Infinite Tree

题意

一棵无限大的树，每个点 i 与 $\frac{i}{\text{mindiv}(i)}$ 连边，其中 $\text{mindiv}(i)$ 表示 i 的最小约数，给定每个阶乘点 $i!$ 的权值 w_i ，求由 1 到 n 的阶乘组成的虚树的带权重心，即求 $\min_u \sum_{i=1}^n w_i \text{dis}(u, i!)$

题解

补题byfyh

题解都说要建一个虚树然后维护啥的，没用那么复杂的做法，方法跟cf#614div2的F有点像

暴力还原出树的路径来，因为阶乘的关系 $i!$ 的路径和 $(i-1)!$ 只有在 i 的地方不一样，所以我们只需要处理每一个 $i!$ 的路径即可，用欧拉筛预处理每个 $i!$ 的 $\text{mindiv}(i!)$

现在尝试求 $u=1$ 时候的答案：

首先对于 $i < j$ 由于都是阶乘，后者都是包含前者的，所以前者怎么走 $(i, n]$ 区间的都会跟着走，所以 $i!$ 每跳一步（设 $\text{tmp}=i!$ ， tmp 到 $\frac{\text{tmp}}{\text{mindiv}(\text{tmp})}$ 一直到 1 ），每走一步累加的权值

是 $\sum_{k=i+1}^n w_k$,这个用前缀和维护即可。

然后开始考虑从1号节点出发走向哪里使得答案变小,设当前的区间为 $[l,r]$ 表示我当前点所维护阶乘所在的子树区间,那么每走一步其实就是在看 $\sum[l,r]$ 和 $\sum[1,l-1]+\sum[r+1,n]$ 的大小关系决定改怎么走,总复杂度 $O(n\log n)$

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define mem(a,b) memset(a,b,sizeof(a))
typedef long long LL;
typedef pair<int,int> PII;
#define X first
#define Y second
inline int read()
{
    int x=0,f=1;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){if(c=='-')f=-1;c=getchar();}
    while(isdigit(c)){x=x*10+c-'0';c=getchar();}
    return x*f;
}
const int maxN=100000;
int n,End,len,prime[maxN+10],mdiv[maxN+10];
LL sum[maxN+10],ans;
PII a[maxN*25];
void init()
{
    for(int i=2;i<=maxN;i++)
    {
        if(!mdiv[i])prime[++End]=i,mdiv[i]=i;
        for(int j=1;j<=End && i*prime[j]<=maxN;j++)
        {
            mdiv[i*prime[j]]=prime[j];
            if(i%prime[j]==0)break;
        }
    }
}
bool cmp(PII a,PII b){
    return a.X==b.X ? a.Y<b.Y : a.X>b.X;
}
int main()
{
    init();
    while(scanf("%d",&n)!=EOF)
    {
        for(int i=1;i<=n;i++)sum[i]=read(),sum[i]+=sum[i-1];
        len=0;ans=0;
        for(int i=2;i<=n;i++)
        {
            int tmp=i;
```

```

        while(tmp>1)
        {
            a[++len]=make_pair(mdiv[tmp],i);
            tmp/=mdiv[tmp];
            ans+=sum[n]-sum[i-1];
        }
    }
    sort(a+1,a+len+1,cmp);
    int l=1,r=n;
    for(int i=1;i<=len;++i)
    {
        if(2ll*(sum[r]-sum[l-1])<sum[n])break;
        if(a[i].Y>r)continue;
        int k=max(l,a[i].Y);
        if(2ll*(sum[r]-sum[k-1])>sum[n])ans-=2ll*(sum[r]-sum[k-1])-
sum[n],l=k;
        else r=k-1;
    }
    printf("%lld\n",ans);
}
return 0;
}

```

D.Quadratic Form

题意

给一个正定对称矩阵 A ，和一个 n 维向量 b ，让你求 n 维实向量，其中满足 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \leq 1$ 且 $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ 最大
求 $(\sum_{i=1}^n b_i x_i)^2$ 的分数形式 $P \cdot Q^{-1} \pmod{998244353}$

题解

补题byfyh

题目那个两个求和式子是一个二次型，写成这样的形式 $x^T A x \leq 1$ 且 $\max\{b^T \cdot x\}$ 设 $a \cdot (x^T A x) = 1$ ，其中 $a \geq 1$ 。

那么设 $x' = \sqrt{a} x$ ，原式即为 $(\sqrt{a} x)^T A (\sqrt{a} x) = (x')^T A x' = 1$

$b^T \cdot x' = b^T \cdot (\sqrt{a} x) \geq b^T \cdot x$ 二次型值一定要为1

故变成： $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \leq 1$ 且 $\max\{b^T \cdot x\}$ 考虑拉格朗日数乘法

$L(x_1, \dots, x_n) = b^T \cdot x - \lambda (x^T A x - 1)$ 对每一个 x_i 求偏导： $\frac{\partial L}{\partial x_i} = b_i - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (x^T A x) = b_i - 2\lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 2\lambda \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ b_n - 2\lambda \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 且 $b = 2\lambda A \cdot x$ 以下简记 $2\lambda = \mu$
 $x = \frac{1}{\mu} A^{-1} b$ ，带入二次型等于1

$\frac{1}{\mu} b^T (A^{-1})^T A \frac{1}{\mu} A^{-1} b = 1$ 其中 $(A^{-1})^T = A^{-1}$ 继续化简得 $\mu = \sqrt{b^T A^{-1} b}$ 回代入 $\text{ans} = (b^T x)^2 = (b^T \frac{1}{\mu} A^{-1} b)^2 = b^T A^{-1} b$ 求逆矩阵即可，复杂度 $O(n^3)$

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define mem(a,b) memset(a,b,sizeof(a))
typedef long long LL;
typedef pair<int,int> PII;
#define X first
#define Y second
inline int read()
{
    int x=0,f=1;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){if(c=='-')f=-1;c=getchar();}
    while(isdigit(c)){x=x*10+c-'0';c=getchar();}
    return x*f;
}
const int maxn=210,MOD=998244353;
int n;
LL a[maxn][maxn<<1],b[maxn];
LL quickpow(LL a,int N,int mod)
{
    LL res=1,tmp=a;
    while(N)
    {
        if(N&1)res=(res*tmp)%mod;
        tmp=(tmp*tmp)%mod;
        N>>=1;
    }
    return res;
}
LL Inv(LL a){return quickpow(a,MOD-2,MOD);}
void gauss()
{
    for(int i=1;i<=n;i++)//按照列来枚举，当前之前i-1列全消完了
    {
        int k=i;
        for(int j=i+1;j<=n;j++)if(a[j][i]>a[k][i])k=j;//找一个系数绝对值最大的放在当前行，方便消元
        LL del=a[k][i];
        for(int j=i;j<=2*n;j++)swap(a[i][j],a[k][j]);
        for(int j=i;j<=2*n;j++)a[i][j]=(a[i][j]*Inv(del))%MOD;
        for(int j=1;j<=n;j++)
            if(j!=i)
            {
                del=a[j][i];
                for(int k=i;k<=2*n;k++)a[j][k]=(a[j][k]-
a[i][k]*del+(LL)MOD*(LL)MOD)%MOD;
```

```

    }
}
int main()
{
    while (scanf ("%d", &n) != EOF)
    {
        for (int i = 1; i <= n; i++)
        {
            for (int j = 1; j <= n; j++) a[i][j] = read();
            for (int j = n + 1; j <= 2 * n; j++) a[i][j] = 0;
            a[i][i + n] = 1;
        }
        for (int i = 1; i <= n; i++) b[i] = read();
        LL ans = 0;
        gauss();
        for (int i = 1; i <= n; i++)
            for (int j = 1; j <= n; j++) ans = (ans + a[i][j + n] * b[i] % MOD * b[j]) % MOD;
        printf ("%lld\n", ans);
    }
    return 0;
}

```

H. Minimum-cost Flow

题意

给定一个网络，每次询问将每条边的容量设置为 $\frac{u_i}{v_i}$ 问在源点注入1流量，流尽后的最小费用，若流不完输出NaN.

题解

solved by fyh hxm 先考虑无解的情况 $\lceil \frac{v_i}{u_i} \rceil > \maxflow$ 是无解的，因为每一次都是流一次 $\frac{u_i}{v_i}$ 最多可以流 \maxflow 次，如果 $\frac{u_i}{v_i} * \maxflow$ 还留不满1显然就是无解。

回忆最小费用最大流的做法，实质就是每次增广之前，在还剩余流量的弧跑最短路，沿着最短路增广，也就是前 k 次增广的费用其实就是前 k 次的最小费用，利用这个性质我们在算最小费用时把每次答案都记录下来即可。

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#include <queue>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
#define LL long long int

```

```
#define REP(i,n) for (int i = 1; i <= (n); i++)
#define Redge(u) for (int k = h[u],to; k; k = ed[k].nxt)
#define BUG(s,n) for (int i = 1; i <= (n); i++) cout<<s[i]<<' '; puts("");
using namespace std;
const int maxn = 55,maxm = 220,INF = 1000000000;
inline int read(){
    int out = 0,flag = 1; char c = getchar();
    while (c < 48 || c > 57) {if (c == '-') flag = -1; c = getchar();}
    while (c >= 48 && c <= 57) {out = (out << 3) + (out << 1) + c - '0'; c
= getchar();}
    return out * flag;
}
int n,m,K,h[maxn],ne = 2,S,T,Q;
struct EDGE{int to,nxt,f,w;}ed[maxm];
inline void build(int u,int v,int f,int w){
    ed[ne] = (EDGE){v,h[u],f,w}; h[u] = ne++;
    ed[ne] = (EDGE){u,h[v],0,-w}; h[v] = ne++;
}
int d[maxn],minf[maxn],p[maxn],inq[maxn],ans[110],len;
queue<int> q;
int mincost(){
    int flow = 0,cost = 0;
    while (true){
        for (int i = 0; i <= T; i++) d[i] = INF,inq[i] = 0;
        d[S] = 0; minf[S] = INF;
        q.push(S);
        int u;
        while (!q.empty()){
            u = q.front(); q.pop();
            inq[u] = false;
            Redge(u) if (ed[k].f && d[to = ed[k].to] > d[u] + ed[k].w){
                d[to] = d[u] + ed[k].w; p[to] = k; minf[to] =
min(minf[u],ed[k].f);
                if (!inq[to]) q.push(to),inq[to] = true;
            }
        }
        if (d[T] == INF) break;
        flow += minf[T];
        cost += minf[T] * d[T];
        ans[++len]=cost;
        u = T;
        while (u != S){
            ed[p[u]].f -= minf[T];
            ed[p[u] ^ 1].f += minf[T];
            u = ed[p[u] ^ 1].to;
        }
    }
    return flow;
}
int gcd(int a,int b){
```

```

    return b==0 ? a : gcd(b,a%b);
}
int main(){
    int a,b,w,u,v;
    while(scanf("%d%d",&n,&m)!=EOF)
    {
        ne=2;
        for(int i=1;i<=n;i++)h[i]=0;
        for(int i=0;i<m;i++)a=read(),b=read(),w=read(),build(a,b,1,w);
        S=1;T=n;len=0;
        int FLOW=mincost();
        Q=read();
        while(Q-->0)
        {
            u=read();v=read();
            double tmp=(double)v/(double)u;
            if(tmp>(double)FLOW)printf("NaN\n");
            else
            {
                int ans1=ans[v/u]*u,ans2=v;
                if(v%u)ans1+=(ans[v/u+1]-ans[v/u])*(v%u);
                printf("%d/%d\n",ans1/gcd(ans1,ans2),ans2/gcd(ans1,ans2));
            }
        }
    }
    return 0;
}

```

训练实况

12:00 读题

12:00 wxg说结论 hxm开写

12:30 hxm过F

12:36 推出J wxg过J hxm想出了错误的做法 开写C fyh想I wxg想A

13:10 hxm wa C 放弃C wxg开写A

14:35之前 尝试想B未果，想出H

14:35 wxg 过A fyh写H wxg hxm想B

15:30 fyh过H

训练总结

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:die_java:front_page_summertrain1&rev=1594971290

Last update: 2020/07/17 15:34