

# 差分约束系统

## 概念

差分约束系统是关于  $n$  个未知量的  $m$  个形如  $x_i - x_j \leq k$  不等式组。一般来求解的存在性问题、最优值问题以及方程组的解。

## 经典模型

- 线性约束：
  - 一般是在一维空间里，给出一些变量，之后告诉你这些变量的大小约束关系，求某个变量的最大值/最小值
  - 比如有  $n$  个人排成直线，给出之间的距离不能大于/小于某个值，求排成的最长/最短距离
  - 设  $d[i]$  为第  $i$  个人的位置，根据大小关系建边即可。
  - 两道例题：[HDU3592](#) [[SCOI2011](#)]糖果
- 区间约束
  - 相比于上一个模型，我们处理的对象变成了区间。
  - 从例题 [POJ 1201](#) 来理解这个模型，给定  $n$  个区间，在数轴上选择最少的点，使得第  $i$  个区间至少有  $c_i$  个点。
  - 参考前缀和的思想，我们可以用  $d[i]$  代表  $[0, i]$  的区间里选点的数量，则对于区间  $[a_i, b_i]$  其中点的数量为  $d[b_i] - d[a_i - 1]$  联立  $c_i$  建图。同时注意为了保证  $d[i]$  合法，还要有  $0 \leq d[i+1] - d[i] \leq 1$
  - 另一道例题：[POJ 1716](#)

## 建边方法

- 考虑松弛过后的最短路  $dis$  数组，对任意一条长度为  $k$  从  $x$  到  $y$  的有向边，满足  $dis_y \leq dis_x + k$  移项得到  $dis_y - dis_x \leq k$  这与开头提到的  $x_i - x_j \leq k$  神似。因此我们将每个变量看成一个点，对每个不等式  $x_i - x_j \leq k$  连一条从  $x_j$  到  $x_i$  的长度为  $k$  的有向边即可。若图存在负环，意味着通过不等式相加可以得到自己小于自己，那么显然是无解的；否则既然这个图不存在负环，那么我们通过最短路算法一定可以松弛所有点使得  $dis$  数组满足我们附加的条件，因此一定有解。
- $x_i - x_j \leq k$  则连一条从  $x_j$  到  $x_i$  的长度为  $k$  的有向边。
- $x_i - x_j \geq k$  即  $x_j - x_i \leq -k$  连一条从  $x_i$  到  $x_j$  的长度为  $-k$  的有向边。
- $x_i = x_j$  等价于  $x_i - x_j \leq 0$  且  $x_i - x_j \geq 0$  连一条从  $x_i$  到  $x_j$  的长度为  $0$  的无向边。
- 最后，额外建立一个起点，向每个变量连一条权值为  $0$  的边，如果有解，最终  $dis$  数组中的取值就构成了一组可行解。

## 放题

### [SCOI2008]天平

#### 传送门

- 题意  $n$  个重量范围已知的砝码，部分轻重关系已知，先在天平左侧放两个砝码，求任选两个砝码

使天平向左倾/水平/向右倾的方案数

- 题解：
  - 由于只知道轻重关系，考虑用 $d_{\max}[i][j]$ 记录 $i-j$ 的最大值，最小值同理。
  - 建出来之后不难发现，和floyd求最短路有点像欸
  - 于是用floyd跑一遍确定一下上下界，然后枚举两个砝码就行了

## [FJOI2018]所罗门王的宝藏

[传送门](#)

倍杀测量者

[传送门](#)

## [HNOI2005]狡猾的商人

[传送门](#)

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer\\_john:%E5%B7%AE%E5%88%86%E7%BA%A6%E6%9D%9F&rev=1590897113](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:%E5%B7%AE%E5%88%86%E7%BA%A6%E6%9D%9F&rev=1590897113) 

Last update: 2020/05/31 11:51