

差分约束系统

概念

差分约束系统是关于 n 个未知量的 m 个形如 $x_i - x_j \leq k$ 不等式组。一般来求解的存在性问题、最优值问题以及方程组的解。

经典模型

- 线性约束：
 - 一般是在一维空间里，给出一些变量，之后告诉你这些变量的大小约束关系，求某个变量的最大值/最小值
 - 比如有 n 个人排成直线，给出之间的距离不能大于/小于某个值，求排成的最长/最短距离
 - 设 $d[i]$ 为第 i 个人的位置，根据大小关系建边即可。
 - 两道例题：[HDU3592](#) [[SCOI2011](#)]糖果
- 区间约束
 - 相比于上一个模型，我们处理的对象变成了区间。
 - 从例题 [POJ 1201](#) 来理解这个模型，给定 n 个区间，在数轴上选择最少的点，使得第 i 个区间至少有 c_i 个点。
 - 参考前缀和的思想，我们可以用 $d[i]$ 代表 $[0, i]$ 的区间里选点的数量，则对于区间 $[a_i, b_i]$ 其中点的数量为 $d[b_i] - d[a_i - 1]$ 联立 c_i 建图。同时注意为了保证 $d[i]$ 合法，还要有 $0 \leq d[i+1] - d[i] \leq 1$
 - 另一道例题：[POJ 1716](#)

建边方法

- 考虑松弛过后的最短路 dis 数组，对任意一条长度为 k 从 x 到 y 的有向边，满足 $dis_y \leq dis_x + k$ 移项得到 $dis_y - dis_x \leq k$ 这与开头提到的 $x_i - x_j \leq k$ 神似。因此我们将每个变量看成一个点，对每个不等式 $x_i - x_j \leq k$ 连一条从 x_j 到 x_i 的长度为 k 的有向边即可。若图存在负环，意味着通过不等式相加可以得到自己小于自己，那么显然是无解的；否则既然这个图不存在负环，那么我们通过最短路算法一定可以松弛所有点使得 dis 数组满足我们附加的条件，因此一定有解。
- $x_i - x_j \leq k$ 则连一条从 x_j 到 x_i 的长度为 k 的有向边。
- $x_i - x_j \geq k$ 即 $x_j - x_i \leq -k$ 连一条从 x_i 到 x_j 的长度为 $-k$ 的有向边。
- $x_i = x_j$ 等价于 $x_i - x_j \leq 0$ 且 $x_i - x_j \geq 0$ 连一条从 x_i 到 x_j 的长度为 0 的无向边。
- 最后，额外建立一个起点，向每个变量连一条权值为 0 的边，如果有解，最终 dis 数组中的取值就构成了一组可行解。

放题

[SCOI2008]天平

传送门

- 题意 n 个重量范围已知的砝码，部分轻重关系已知，先在天平左侧放两个砝码，求任选两个砝码

使天平向左倾/水平/向右倾的方案数

- 题解：
 - 由于只知道轻重关系，考虑用 $d_{\max}[i][j]$ 记录 $i-j$ 的最大值，最小值同理。
 - 建出来之后不难发现，和 $floyd$ 求最短路有点像欸
 - 于是用 $floyd$ 跑一遍确定一下上下界，然后枚举两个砝码就行了

[FJOI2018]所罗门王的宝藏

传送门

- 题意：有 $n+m$ 个变量，给定 k 组限制，每次告诉你 $x_r+y_c=k$ 问是否有可行解。
- 题解：将 $x_r+y_c=k$ 转变为两个不等式 $x_r+y_c \leq k, x_r+y_c \geq k$ 建边判负环即可。

倍杀测量者

传送门

[HNOI2005]狡猾的商人

传送门

- 题意：给定 m ($m \leq 1000$) 个限定，每个限定为 $\sum_{i=s}^t a_i = v_j$ 问是否存在这样一个序列 a 序列长度 $n \leq 100$
- 题解：考虑前缀和 $\sum_i = \sum_{j=1}^i a_j$ 限定转化为 $\sum_t - \sum_{s-1} = v_j$ 将等式转化为两个不等式 $\sum_t - \sum_{s-1} \geq v_j, \sum_t - \sum_{s-1} \leq v_j$ 即可。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:%E5%B7%AE%E5%88%86%E7%BA%A6%E6%9D%9F&rev=1590916369

Last update: 2020/05/31 17:12