差分约束系统

概念

差分约束系统是关于 n 个未知量的 m 个形如 $x_i-x_j\le k$ 不等式组。一般来求解的存在性问题、最优值问题以及方程组的解。

经典模型

- 线性约束：
  - 一般是在一维空间里，给出一些变量，之后告诉你这些变量的大小约束关系，求某个变量的最大值/最小值
  - 比如有n个人排成直线，给出之间的距离不能大于/小于某个值，求排成的最长/最短距离
  - 设$d[i]$为第i个人的位置，根据大小关系建边即可。
  - 两道例题：HDU3592□[SCOI2011]糖果
- 区间约束
  - 相比于上一个模型，我们处理的对象变成了区间。
  - 从例题POJ 1201来理解这个模型，给定n个区间，在数轴上选择最少的点，使得第i个区间至少有c_i个点。
  - 参考前缀和的思想，我们可以用$d[i]$代表$[0,i]$的区间里选点的数量，则对于区间$[a_i,b_i]$□其中点的数量为$d[b_i]-d[a_i-1]$□联立c_i建图。同时注意为了保证$d[i]$合法，还要有$0\leq d[i+1]-d[i]\leq 1$□
  - 另一道例题：POJ 1716

建边方法

- 考虑松弛过后的最短路dis数组，对任意一条长度为k从x到y的有向边，满足$ dis_y \le dis_x + k $□移项得到$ dis_y - dis_x \le k $□这与开头提到的$ x_i - x_j\le k $神似。因此我们将每个变量看成一个点，对每个不等式$ x_i - x_j\le k $连一条从$x_j$到$x_i$的长度为$k$的有向边即可。若图存在负环，意味着通过不等式相加可以得到自己小于自己，那么显然是无解的；否则既然这个图不存在负环，那么我们通过最短路算法一定可以松弛所有点使得dis数组满足我们附加的条件，因此一定有解。
- $x_i - x_j \le k$□则连一条从x_j到x_i的长度为k的有向边。
- $x_i - x_j \ge k$□即$x_j - x_i \le -k$□连一条从x_i到x_j的长度为$-k$的有向边。
- $x_i = x_j$□等价于$x_i - x_j \le 0$且$x_i - x_j \ge 0$□连一条从x_i到x_j的长度为0的无向边。
- 最后，额外建立一个起点，向每个变量连一条权值为0的边，如果有解，最终dis数组中的取值就构成了一组可行解。

放题

[SCOI2008]天平

传送门

- 题意□n个重量范围已知的砝码，部分轻重关系已知，先在天平左侧放两个砝码，求任选两个砝码

使天平向左倾/水平/向右倾的方案数
- 题解：
  - 由于只知道轻重关系，考虑用$dmax[i][j]$记录$i-j$的最大值，最小值同理。
  - 建出来之后不难发现，和$floyd$求最短路有点像欸
  - 于是用$floyd$跑一遍确定一下上下界，然后枚举两个砝码就行了

[FJOI2018]所罗门王的宝藏

传送门

- 题意：有 $n+m$ 个变量，给定 k 组限制，每次告诉你 $x_r+y_c=k$问是否有可行解。
- 题解：将 $x_r+y_c=k$ 转变为两个不等式 $x_r-(-y_c)\le k,x_r-(-y_c)\ge k$ 建边判负环即可。

倍杀测量者

传送门

[HNOI2005]狡猾的商人

传送门

- 题意：给定 $m (m\le 1000)$ 个限定，每个限定为 $\sum_{i=s}^t a_i=v_j$问是否存在这样一个序列 a 序列长度 $n\le 100$
- 题解：考虑前缀和 $sum_i=\sum_{j=1}^i a_j$ 限定转化为 $sum_t-sum_{s-1}=v_j$ 将等式转化为两个不等式 $sum_t-sum_{s-1}\ge v_j,sum_t-sum_{s-1}\le v_j$ 即可。