

莫比乌斯反演技巧总结

常用狄利克雷卷积

- $\epsilon = \mu * 1$ 证明：二项式定理 $(1 - 1)^2 = 0$ 。
- $\varphi = \mu * 1$ 证明：真分数约分。
- $\mu = \mu * \varphi$ 证明：上面式子左右卷 μ

常用套路

- 求 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gcd(i, j)$ 先枚举 $d = \gcd(i, j)$ 再套用 $\epsilon = \mu * 1$

$$\sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [\gcd(i, j) = 1]$$

$$\sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \mu(\gcd(i, j))$$
再枚举 p

$$\sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} \mu(p)$$

$$\sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} 1$$

$$\sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \frac{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor \lfloor \frac{m}{dp} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor} (\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor + 1) (\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor + 1)$$
设 $T = dp$ 枚举 T

$$\sum_{T=1}^{\min(n, m)} \frac{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \sum_{d|T} d \mu(\frac{T}{d})$$
套用 $\varphi = \mu * 1$

$$\sum_{T=1}^{\min(n, m)} \frac{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \varphi(T)$$
求出欧拉函数前缀和，直接整除分块即可。
- 上述过程中最为关键的是设 $T = dp$ 枚举 T 这一步。该操作可以概括为如下等式
$$\sum_{d=1}^n f(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} g(p) h(dp) = \sum_{T=1}^n h(T) \sum_{d|T} f(d) g(\frac{T}{d})$$
设 $F(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$ 则原式可化为 $\sum_{T=1}^n h(T) F(T)$ 如果两个函数一个可以整除分块，另一个可以在合理时限内求出前缀和，那么就可以以较低时间复杂度求出答案。
- 结论 $\sum_{i=1}^n \sum_{d|\gcd(i, n)} \mu(d) = \frac{n \varphi(n) + [n=1]}{2}$ 证明如下
$$\sum_{i=1}^n \sum_{d|\gcd(i, n)} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} 1$$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} (\frac{n}{d} + 1)$$

$$= \frac{n}{2} \sum_{d|n} \mu(d) (\frac{n}{d} + 1)$$

$$= \frac{n}{2} (\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} + \sum_{d|n} \mu(d))$$
由 $\varphi = \mu * 1$ 可得 $\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \varphi(n) + [n=1]$

$$= \frac{n \varphi(n) + [n=1]}{2}$$