

莫比乌斯反演技巧总结

常用狄利克雷卷积

- $\$epsilon = \mu * 1$ 证明：二项式定理 $(1 - 1)^2 = 0$ 。
 - $\operatorname{id} = \varphi * 1$ 证明：真分数约分。
 - $\varphi = \mu * \operatorname{id}$ 证明：上面式子左右卷 μ 。

常用套路

经典老番

- 求 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gcd(i,j)$ 先枚举 $d = \gcd(i,j)$ 再套用 $\epsilon = \mu * \sum_{d=1}^n d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [\gcd(i,j) = 1]$ $\epsilon = \sum_{d=1}^n d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \mu(p)$ 再枚举 p $\epsilon = \sum_{d=1}^n d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} 1$ $\epsilon = \sum_{d=1}^n d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} \mu(p) \frac{1}{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \frac{1}{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor}$ 设 $T = dp$ 枚举 T $\epsilon = \sum_{T=1}^n \frac{1}{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \frac{1}{\lfloor \frac{m}{T} \rfloor}$ 套用 $\varphi = \mu * \operatorname{id}$ $\varphi(T) = \sum_{d|T} d \mu(\frac{T}{d})$ 求出欧拉函数前缀和，直接整除分块即可。

- 上述过程中最为关键的是设 $T=dp$ 枚举 T 这一步。该操作可以概括为如下等式 $\sum_{d=1}^n f(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} g(p) h(dp) = \sum_{T=1}^n h(T) \sum_{d|T} f(d) g(\frac{T}{d})$ 设 $F(n) = \sum_n f(d) g(\frac{n}{d})$ 则原式可化为 $\sum_{T=1}^n h(T) F(T)$ 如果两个函数一个可以整除分块，另一个可以用 $O(1)/O(n \log n)/O(n)/O(n^{1/2})$ 求出前缀和，那么就可以以较低时间复杂度求出答案。

- 结论 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gcd(i,n)} = \frac{\varphi(n) + [n=1]}{n}$ 证明如下
 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gcd(i,n)} = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{i=1}^n \frac{1}{d} \left(\frac{n}{d} + 1 \right)$
 $= \frac{1}{2} \sum_{d|n} \mu(d) d \left(\frac{n}{d} + 1 \right)$
 $= \frac{n}{2} \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d} + 1 \right)$
 $= \frac{n}{2} (\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} + \sum_{d|n} \mu(d))$
 $= \frac{n}{2} (\varphi(n) + [n=1])$

Last update: 2020-2021:teams:farmer_john: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:&E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94%E6%8A%80%E5%B7%A7%E6%80%BB%E7%BB%93&rev=1598001926
2020/08/21 莫比乌斯反演技巧总结
17:25

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:&E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94%E6%8A%80%E5%B7%A7%E6%80%BB%E7%BB%93&rev=1598001926

Last update: 2020/08/21 17:25

