

莫比乌斯反演技巧总结

常用狄利克雷卷积

- $\epsilon = \mu * 1$ 证明：二项式定理 $(1 - 1)^2 = 0$ 。
- $\varphi = \mu * \text{id}$ 证明：真分数约分。
- $\mu = \mu * \text{id}$ 证明：上面式子左右卷 μ

常用套路

经典老番

- 求 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gcd(i, j)$ 先枚举 $d = \gcd(i, j)$ 再套用 $\epsilon = \mu * 1$

$$= \sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [\gcd(i, j) = 1]$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \mu(\gcd(i, j))$$
再枚举 p

$$= \sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} 1$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \frac{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor \lfloor \frac{m}{dp} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor + 1}$$
设 $T = dp$ 枚举 T

$$= \sum_{T=1}^{\min(n, m)} \frac{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor + 1} \sum_{d|T} d \mu(\frac{T}{d})$$
套用 $\varphi = \mu * \text{id}$

$$= \sum_{T=1}^{\min(n, m)} \frac{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor + 1} \varphi(T)$$
求出欧拉函数前缀和，直接整除分块即可。
- 上述过程中最为关键的是设 $T = dp$ 枚举 T 这一步。该操作可以概括为如下等式
$$\sum_{d=1}^n f(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} g(p) h(dp) = \sum_{T=1}^n h(T) \sum_{d|T} f(d) g(\frac{T}{d})$$
设 $F(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$ 则原式可化为 $\sum_{T=1}^n h(T) F(T)$ 如果两个函数一个可以整除分块，另一个可以用 $O(1)/O(n \log n)/O(n)/O(n^{\frac{2}{3}})$ 求出前缀和，那么就可以以较低时间复杂度求出答案。

结论1

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = 1] = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^n \varphi(i) + \sum_{j=1}^m \varphi(j) + 1)$ 证明如下

套用 $\epsilon = \mu * 1$

$$= \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} 1$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) \left(\frac{n}{d} \lfloor \frac{m}{d} \rfloor + \frac{m}{d} \lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) \frac{n}{d} \lfloor \frac{m}{d} \rfloor + \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) \frac{m}{d} \lfloor \frac{n}{d} \rfloor + \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) \right)$$
由 $\varphi = \mu * \text{id}$ 和 $\epsilon = \mu * 1$ 可得 $\sum_{i=1}^n \varphi(i) + \sum_{j=1}^m \varphi(j) + 1$

$$\phi(n) = \frac{\varphi(n) + n}{2}$$

结论

- 结论 $\phi(n) = \frac{\varphi(n) + n}{2}$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021.teams:farmer_john:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94%E6%8A%80%E5%B7%A7%E6%80%BB%E7%BB%93&rev=1598002000

Last update: 2020/08/21 17:26