

# 莫比乌斯反演技巧总结

## 常用狄利克雷卷积

- $\epsilon = \mu * 1$  证明：二项式定理  $(1 - 1)^2 = 0$ 。
- $\varphi = \mu * \text{id}$  证明：真分数约分。
- $\mu = \mu * \text{id}$  证明：上面式子左右卷  $\mu$ 。

## 常用套路

### 经典老番

求  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gcd(i, j)$  先枚举  $d = \gcd(i, j)$  再套用  $\epsilon = \mu * 1$   
 $\sum_{d=1}^n d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [\gcd(i, j) = 1]$   
 $\sum_{d=1}^n d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \sum_{p|\gcd(i, j)} \mu(p)$  再枚举  $p$   
 $\sum_{d=1}^n d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{dp} \rfloor} 1$   
 $\sum_{d=1}^n d \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \frac{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor \lfloor \frac{m}{dp} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{n}{dp} \rfloor \lfloor \frac{m}{dp} \rfloor$  设  $T = dp$  枚  
 举  $T$   $\sum_{T=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor} \lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor$   
 $\sum_{d|T} d \mu(\frac{T}{d})$  套用  $\varphi = \mu * \text{id}$   
 $\sum_{T=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor} \lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor \varphi(T)$  求出欧  
 拉函数前缀和，直接整除分块即可。

上述过程中最为关键的是设  $T = dp$  枚举  $T$  这一步。该操作可以概括为如下等  
 式  $\sum_{d=1}^n f(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} g(p) h(dp) = \sum_{T=1}^n h(T) \sum_{d|T} f(d) g(\frac{T}{d})$  设  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$   
 $g(\frac{n}{d})$  则原式可化为  $\sum_{T=1}^n h(T) F(T)$  如果两个函数一个可以整除分块，另一个  
 可以用  $O(1)/O(n \log n)/O(n)/O(n^{\frac{2}{3}})$  求出前缀和，那么就可以以较低时间复杂度求出答案。

## 结论1

$\sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1] = \frac{\varphi(n) + [n=1]}{2}$  证明如  
 下  $\sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$  套用  $\epsilon = \mu * 1$   
 $\sum_{d|n} \mu(d) \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} i$  枚举  $d$  注意这里  $n$  是已知量，只需枚举  $d|n$   
 $\frac{1}{2} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} (\frac{n}{d} + 1)$   
 $\frac{1}{2} \sum_{d|n} \mu(d) (\frac{n}{d} + 1)$   
 $\frac{1}{2} (\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} + \sum_{d|n} \mu(d))$  由  $\varphi = \mu * \text{id}$   
 $\text{id}$  和  $\epsilon = \mu * 1$  可得  $\frac{1}{2} (\varphi(n) + [n=1])$   
 $\frac{\varphi(n) + [n=1]}{2}$   $\frac{\varphi(n) + [n=1]}{2}$

## 结论

\$\$\varphi\$\$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021.teams:farmer\\_john:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94%E6%8A%80%E5%B7%A7%E6%80%BB%E7%BB%93&rev=1598002109](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021.teams:farmer_john:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94%E6%8A%80%E5%B7%A7%E6%80%BB%E7%BB%93&rev=1598002109)

Last update: 2020/08/21 17:28

