

图论

CF1391E

题意

给出一张 n 个点 m 条边的无向联通图，现在要求在这张图中要么找到一个至少有 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个点的路径，要么找到一个至少包含 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个点集合，要求点的个数为偶数，每两个节点分为一组，每个节点只在一组，且任意两组一共四个点所生成的子图中边数不超过两条 $(2 \leq n \leq 5 \cdot 10^5, 1 \leq m \leq 10^6)$

题解

构建dfs生成树，如果最深的节点深度 $\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 则已经找到一条合法路径。否则所有点的深度均小于 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 我们只需要将同一深度的数个点两两分为一组，如果是奇数就扔掉那一个，这样最多扔掉 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个点，且这些组合显然满足条件（由dfs生成树的性质）。

CF1389G

题意

给出一张 n 个点 m 条边的无向图，其中有 k 个点是关键点，每条边有一个权值 w_i 每个点有一个权值 c_i 你可以给每条边定向，也可以让它保持无向，设所有保持无向的边集为 U 设所有关键点能都到达的点组成的点集为 S 现在如果强制让第 $1, 2, \dots, n$ 个点能被所有关键点到达，求 $\sum \limits_{i \in S} c_i - \sum \limits_{j \in U} w_j$ 的最小值 $(2 \leq n \leq 3 \cdot 10^5, n-1 \leq m \leq \min(3 \cdot 10^5, \frac{n(n-1)}{2}), 1 \leq k \leq n)$

题解

首先找到所有边双联通分量将其缩点，可以证明每一个边双都可以给边定向从而形成强连通分量，因此每一个边双内部不用考虑边的定向问题。

现在原图转化为了一棵树，下面所说的关键点指包含关键点的边双。以一个关键点为根，将所有叶子节点为非关键点的点都向上缩，权值进行叠加，因为它们显然定向为上才有意义，因此可以锁到距离最近的关键点，这样可以简化后续讨论。

现在我们所有叶子节点均为关键点，那么能被所有关键点到达的点一定组成一个连通块，连通块内部所有边无向，其它边均被定向。因此我们可以使用树形dp解决下面的问题，设 f_i 为以 i 为根的子树中包含点 i 的连通块的最大权值，转移为 $f_i = c_i + \sum \{ \max(f_j - w, 0) \mid j \in \text{son}_i \}$ 其中 w 为对应的边权 c_i 为缩点后的总权值，那么单次dp中对于根节点最终所求的答案为 f_{root}

我们最后再进行一次换根dp即可以每个点为根求出最终的答案。注意到因为第一次我们选的关键点为根，所以换根过程中始终满足所有叶子节点均为关键点这一条件。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2020%E6%9A%91%E5%81%87%E7%B2%BE%E9%80%89%E9%A2%98%E7%9B%AE:%E5%9B%BE%E8%AE%BA

Last update: 2020/09/04 20:19