

# 数论及其它数学

## CF809E

### 题意

给出一棵  $n$  ( $2 \leq n \leq 2 \times 10^5$ ) 个节点的树，边权为  $1$ 。给定一个  $1$  到  $n$  的排列  $a_i$ 。设  $\text{dist}(i, j)$  为树上两点间距离，求  $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(a_i \cdot a_j) \text{dist}(i, j) \pmod{10^9+7}$ 。

### 题解

因为  $a_i$  是  $1$  到  $n$  的排列，所以我们可以设  $p_{a_i} = i$ 。同时有以下结论  $\varphi(nm) = \frac{\varphi(n)\varphi(m)\gcd(n, m)}{\varphi(\gcd(n, m))}$ 。因此扔掉前面的分母  $n(n-1)$  原式转化为  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(i)\varphi(j)\gcd(i, j)\text{dist}(p_i, p_j)}{\varphi(\gcd(i, j))}$ 。开始反演，枚举  $d = \gcd(i, j)$   $\sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd)\text{dist}(p_{id}, p_{jd})$  ( $\gcd(i, j) = 1$ )。套用  $\epsilon = \mu * 1$   $\sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd)\text{dist}(p_{id}, p_{jd}) \sum_{p|\gcd(i, j)} \mu(p)$ 。枚举  $p$   $\sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \varphi(idp)\varphi(jdp)\text{dist}(p_{idp}, p_{jdp})$ 。枚举  $T = dp$   $\sum_{T=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT)\text{dist}(p_{iT}, p_{jT}) \sum_{d|T} \frac{\mu(\frac{T}{d})}{\varphi(d)}$ 。设  $f(T) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT)\text{dist}(p_{iT}, p_{jT})$   $g(T) = \sum_{d|T} \frac{\mu(\frac{T}{d})}{\varphi(d)}$ 。则原式转化为  $\sum_{T=1}^n f(T)g(T)$ 。其中  $g(T)$  可以在  $O(n \log n)$  的时间求出，考虑  $f(T)$  本质相当于给  $p_i$  点一个权值  $\varphi(i)$  然后把所有下标为  $T$  的倍数点  $p_i$  拿出来建虚树跑一遍将每条边的长度乘以两侧节点权值和即可，总结点数是  $O(n \log n)$  的，因此总复杂度为  $O(n \log n)$ 。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer\\_john:2020%E6%9A%91%E5%81%87%E7%B2%BE%E9%80%89%E9%A2%98%E7%9B%AE%E6%95%B0%E5%AD%A6&rev=1599181567](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2020%E6%9A%91%E5%81%87%E7%B2%BE%E9%80%89%E9%A2%98%E7%9B%AE%E6%95%B0%E5%AD%A6&rev=1599181567)

Last update: 2020/09/04 09:06