

数论及其它数学

CF809E

题意

给出一棵 $n(2 \leq n \leq 2 \times 10^5)$ 个节点的树，边权为 1 。给定一个 1 到 n 的排列 a_i ，
 设 $\text{dist}(i, j)$ 为树上两点间距离，
 求 $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(a_i \cdot a_j) \text{dist}(i, j) \pmod{10^9+7}$

题解

因为 a_i 是 1 到 n 的排列，所以我们可以设 $p_{a_i} = i$ 同时有以下结论 $\varphi(nm) = \frac{\varphi(n)\varphi(m)\text{gcd}(n,m)}{\varphi(\text{gcd}(n,m))}$ 因此扔掉前面的分母 $n(n-1)$ 原式转化为 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(i)\varphi(j)\text{gcd}(i,j)\text{dist}(p_i, p_j)}{\varphi(\text{gcd}(i,j))}$ 开始反演，枚举 $d = \text{gcd}(i, j)$ $= \sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd)\text{dist}(p_{id}, p_{jd}) [\text{gcd}(i, j) = 1]$ 套用 $\epsilon = \mu * 1$ $= \sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd)\text{dist}(p_{id}, p_{jd}) \sum_{p|\text{gcd}(i, j)} \mu(p)$ 枚举 p $= \sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \varphi(idp)\varphi(jdp)\text{dist}(p_{idp}, p_{jdp})$ 枚举 $T = dp$ $= \sum_{T=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT)\text{dist}(p_{iT}, p_{jT}) \sum_{d|T} \frac{\mu(\frac{T}{d})d}{\varphi(d)}$ 设 $f(T) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT)\text{dist}(p_{iT}, p_{jT})$ $g(T) = \sum_{d|T} \frac{\mu(\frac{T}{d})d}{\varphi(d)}$ 则原式转化为 $\sum_{T=1}^n f(T)g(T)$ 其中 $g(T)$ 可以在 $O(n \log n)$ 的时间求出，考虑 $f(T)$ 本质相当于给 p_i 点一个权值 $\varphi(i)$ 然后把所有下标为 T 的倍数点 p_i 拿出来建虚树跑一遍将每条边的长度乘以两侧节点权值和即可，总结点数是 $O(n \log n)$ 的，因此总复杂度为 $O(n \log n)$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2020%E6%9A%91%E5%81%87%E7%B2%BE%E9%80%89%E9%A2%98%E7%9B%AE:%E6%95%B0%E5%AD%A6&rev=1599181567

Last update: 2020/09/04 09:06