

数论及其它数学

CF803C

题意

请你构造一个长度为 k 的严格上升正整数序列，使得所有数的和恰好为 n 并且所有数的最大公约数最大。输出这个序列。如果没有合法的序列输出 -1 。如果有多个合法的序列，可以输出任意一个 $(n, k \leq 10^4)$

题解

枚举 \gcd 只要 $\gcd \cdot \frac{k(k+1)}{2} \leq n$ 即有解。

CF803F

题意

给你一个长度为 n 的序列，问你有多少个子序列的 $\gcd=1$ 对 10^9+7 取模 $(n \leq 10^5)$

题解

本题我们需要求出 $f_i = \sum_{\gcd(a_{p_1}, a_{p_1}, \dots, a_{p_k}) = i} 1$ 设 $cnt_i = \sum_{j=1}^n [i|a_j]$ 则 $f_i = \sum_{j=1}^{cnt_i} \binom{cnt_i}{j} - \sum_{j=1}^{nf_j[i]} f_j = 2^{cnt_i} - \sum_{j=1}^{nf_j[i]} f_j$ 逆序枚举 i 即可 $O(n \log n)$ 求解。

CF839D

题意

给出一个长度为 n 的序列 a_i 求 $\sum_{\gcd(a_{p_1}, a_{p_1}, \dots, a_{p_k}) \neq 1} k \cdot \gcd(a_{p_1}, a_{p_1}, \dots, a_{p_k}) \pmod{10^9+7}$ 其中 $1 \leq k \leq n, p_1 < p_2 < \dots < p_k$ $(n \leq 2 \times 10^5, a_i \leq 10^6)$

题解

上一题的升级版，我们在上一题我们通过容斥求出了 $f_i = \sum_{\gcd(a_{p_1}, a_{p_1}, \dots, a_{p_k}) = i} 1$ 本题我们则需要求出 $g_i = \sum_{\gcd(a_{p_1}, a_{p_1}, \dots, a_{p_k}) = i} k$ 最终答案为 $\sum_{i=2}^n i g_i$ 类似上一题的方法

设 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \binom{cnt_i}{j}$ 则 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} = 2^{cnt_i} - 1$
 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \frac{1}{j} \binom{cnt_i}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \frac{1}{j} \frac{cnt_i!}{(j-1)!(cnt_i-j)!} =$
 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \binom{cnt_i-1}{j-1} = 2^{cnt_i-1}$
 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \binom{cnt_i-1}{j-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i-1} \binom{cnt_i-1}{j} \frac{1}{j+1} =$
 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \binom{cnt_i-1}{j-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i-1} \binom{cnt_i-1}{j} \frac{1}{j+1} =$
 $\sum_{j=1}^n \binom{cnt_i}{j} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{cnt_i} \binom{cnt_i-1}{j-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{cnt_i-1} \binom{cnt_i-1}{j} \frac{1}{j+1} =$
逆序枚举 i 即可 $O(n \log n)$ 求解。

CF809E

题意

给出一棵 $n (2 \leq n \leq 2 \times 10^5)$ 个节点的树，边权为 1 。给定一个 1 到 n 的排列 a_i
设 $\text{dist}(i, j)$ 为树上两点间距离，
求 $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(a_i \cdot a_j)$
 $\text{dist}(i, j) \pmod{10^9+7}$

题解

因为 a_i 是 1 到 n 的排列，所以我们可以设 $p_{a_i} = i$ 同时有以下结论
 $\varphi(nm) = \frac{\varphi(n)\varphi(m)\text{gcd}(n,m)}{\varphi(\text{gcd}(n,m))}$ 因此扔掉前面的分母 $n(n-1)$
原式转化为 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(i)\varphi(j)\text{gcd}(i,j)\text{dist}(p_i, p_j)}{\varphi(\text{gcd}(i,j))}$ 开始反演，枚举 $d = \text{gcd}(i, j)$
 $= \sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd)\text{dist}(p_{id}, p_{jd}) [\text{gcd}(i, j) = 1]$ 套用 $\epsilon = \mu * 1$
 $= \sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd)\text{dist}(p_{id}, p_{jd}) \sum_{p|\text{gcd}(i, j)} \mu(p)$ 枚举 p
 $= \sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \varphi(idp)\varphi(jdp)\text{dist}(p_{idp}, p_{jdp})$ 枚举 $T = dp$
 $= \sum_{T=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \frac{\mu(\frac{T}{d})}{\varphi(d)} \varphi(iT)\varphi(jT)\text{dist}(p_{iT}, p_{jT}) \sum_{d|T} \frac{d}{\varphi(d)}$ 设 $f(T) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT)\text{dist}(p_{iT}, p_{jT})$
 $g(T) = \sum_{d|T} \frac{d}{\varphi(d)}$ 则原式转化为 $\sum_{T=1}^n f(T)g(T)$ 其中 $g(T)$ 可以在 $O(n \log n)$ 的时间求出，考虑 $f(T)$ 本质相当于给 p_i 点一个权值 $\varphi(i)$ 然后把所有下标为 T 的倍数点 p_i 拿出来建虚树跑一遍将每条边的长度乘以两侧节点权值和即可，总结点数是 $O(n \log n)$ 的，因此总复杂度为 $O(n \log n)$

From: <https://wiki.cvvbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvvbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2020%E6%9A%91%E5%81%87%E7%B2%BE%E9%80%89%E9%A2%98%E7%9B%AE:%E6%95%B0%E5%AD%A6&rev=1599183406

Last update: 2020/09/04 09:36