

2020 Multi-University Training Contest 6

比赛链接

A.

solved by JJLeo

题意

给出一个序列，等概率地选择左右端点 $l \leq r$ 求 $[l,r]$ 区间平均数的期望值。

题解

题目本质是问长度为 $1, 2, \dots, n$ 的连续子区间中，每个数各出现了多少次。可以发现如下规律： $1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \$\ \$\$ 因此整个前缀和，对于每个除以一下区间长度，最后再除以总方案数即可。

B.

solved by 2sozx

题意

给出一个式子 $a \ \text{opt} \ b \ = \ c$ 中间无空格，问在二至十六进制下哪个进制可以使得等式成立
 $\text{opt} = +, -, *, /$

题解

模拟即可，注意进制没有一进制，即 $0+0=0$ 最少也是在二进制下成立。

C.

upsolved by

题意

$(10,1,1) (6,4,2) (6,5,1)$ 我裂开

题解

D.

solved by Bazoka13

题意

给定平面里的 n 个点，每个点有一个种类，共计三个种类，每个种类选出一个点，选出三个点，使得三个点组成的三角形面积最大

题解

1. 显然可以通过枚举某两个种类的点，然后去找距离当前构成的线段距离最远的点，而距离最远的点一定是在第三类点所构成的凸包上，那么只要求出第三种点的上下凸包，然后跑一个三分即可。
2. 由于不知道是凸凹函数，需要都跑一遍，但是有可能会出双峰的情况，换一个方向再跑一遍即可。

E.

solved by

题意

题解

F.

solved by Bazoka13 JJLeo

题意

第 i 条路径的权值是 2^i 每个点要么是黑色，要么是白色，求所有异色点最短路的长度总和

题解

根据等比数列，显然有前 $i-1$ 项总和小于第 i 项，那么求一个最小生成树然后 dfs 处理两侧异色点数即可

G.

upsolved by 2sozx Bazoka13 JJLeo

题意

给定 k 与 x 次询问，每次询问给定一个 n

求 $\sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \dots \sum_{a_x=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1}^x a_j^k} \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)} \cdot \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x) \pmod{\{10^9+7\}}}$ 其中 $f(n)$ 定义如下：如果存在正整数 k 使得 $k^2 | n$ 那么 $f(n) = 0$ 否则 $f(n) = 1$ $(1 \leq t \leq 10^4, 1 \leq k \leq 10^9, 1 \leq x \leq 10^9, 1 \leq n \leq 2 \times 10^5)$

题解

首先，容易证明以下两个等式成立，以便反演中使用

$$f(n) = |\mu(n)| = \mu^2(n)$$

$$\sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \dots \sum_{a_x=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1}^x a_j^k} = \left(\sum_{i=1}^n i^{-k} \right)^x$$

接下来我们开始反演

$$\sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \dots \sum_{a_x=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1}^x a_j^k} \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)} \cdot \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)}$$

$$\text{枚举 } d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{1}{\prod_{j=1}^x (a_j d)^k} \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x) = 1}$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{kx+1} \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{1}{\prod_{j=1}^x a_j^k} \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x) = 1}$$

利用 $\epsilon = \mu * 1$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{kx+1} \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{1}{\prod_{j=1}^x a_j^k} \sum_p \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)} \mu(p)$$

枚举 p

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{kx+1} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \frac{1}{\prod_{j=1}^x (a_j p)^k}$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{kx+1} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}$$

$$\left\lfloor \mu(p) p^{\{kx\}} \sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} \left(\prod_{j=1}^x a_j^k \right) \right\rfloor$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{\{kx+1\}} \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor \mu(p) p^{\{kx\}} \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} i^k \right)^x$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor \mu(p) \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} i^k \right)^x$$

令 $T = dp$ 枚举 T

$$= \sum_{T=1}^n n^{\{kx\}} \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor} i^k \right)^x \sum_{d|T} \mu^2(d) \mu\left(\frac{T}{d}\right) d$$

$$= \sum_{T=1}^n \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor} i^k \right)^x \sum_{d|T} \mu^2(d) \mu\left(\frac{T}{d}\right) d$$

设

$$F(n) = \left(\sum_{i=1}^n i^k \right)^x$$

$$G(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$$

则所求式子化为

$$\sum_{T=1}^n F\left(\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor\right) G(T)$$

$O(n \log n)$ 分别处理出 $F(n)$ 和 $G(n)$ 对于每组询问 $O(\sqrt{n})$ 整除分块即可，总复杂度 $O(n \log n + t \sqrt{n})$

H.

upsolved by

题意

题解

I.

solved by

题意

题解

J.

solved by

题意

题解

K.

upsolved by

题意

题解

记录

0min□开局分题
8min□ZYF猜结论 AC I □MJX冲B
18min□MJX WA B
28min□MJX AC B□CSK 冲F
60min□CSK WA3□换ZYF冲A
61min□ZYF AC A□冲J
66min□ZYF AC J□冲E
68min□CSK AC F
101min□ZYF AC E
101min~210min□自闭ing
210min□CSK冲D□ZYF MJX 冲C
269min□CSK AC D
till end□C应该是想错了
after end□G式子推出来了结果 n 范围看错了

总结

- MJX□要认真看数据范围，不要把 10^5 当作 10^9
- CSK□别读错题，别读错题，别读错题，%ZYF
- ZYF□要学习更多的知识点以应对毒瘤的HDU多校，同时不要每次都死在概率与期望上。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2020hdu%E6%9A%91%E6%9C%9F%E5%A4%9A%E6%A0%A1%E7%AC%AC%E5%85%AD%E5%9C%BA&rev=1597997352

Last update: 2020/08/21 16:09