

# 2020 Multi-University Training Contest 6

[比赛链接](#)

## A.

solved by JJLeo

### 题意

给出一个序列，等概率地选择左右端点  $l \leq r$  求  $[l, r]$  区间平均数的期望值。

### 题解

题目本质是问长度为  $1, 2, \dots, n$  的连续子区间中，每个数各出现了多少次。可以发现如下规律： $1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ \$\ \$\ \$\ \$\ \$\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \$\ \$\$  因此整个前缀和，对于每个除以一下区间长度，最后再除以总方案数即可。

## B.

solved by 2sozx

### 题意

给出一个式子  $a \ \text{opt} \ b \ = \ c$  中间无空格，问在二至十六进制下哪个进制可以使得等式成立  
 $\text{opt} = +, -, *, /$

### 题解

模拟即可，注意进制没有一进制，即  $0+0=0$  最少也是在二进制下成立。

## C.

upsolved by

### 题意

$(10, 1, 1)$   $(6, 4, 2)$   $(6, 5, 1)$  我裂开

## 题解

### D.

solved by Bazoka13

#### 题意

给定平面里的 $n$ 个点，每个点有一个种类，共计三个种类，每个种类选出一个点，选出三个点，使得三个点组成的三角形面积最大

#### 题解

1. 显然可以通过枚举某两个种类的点，然后去找距离当前构成的线段距离最远的点，而距离最远的点一定是在第三类点所构成的凸包上，那么只需要求出第三种点的上下凸包，然后跑一个三分即可。
2. 由于不知道是凸凹函数，需要都跑一遍，但是有可能会出双峰的情况，换一个方向再跑一遍即可。

### E.

solved by JJLeo

#### 题意

将 $1145141919$ 循环无限次得到一个字符串，现在需要选取一个前缀，将这个前缀添加任意数量的 $()$ 使得表达式的值等于 $x$ 。现在问对于 $x=1,2,\dots,5000$ 选取的最短前缀长度是多少，或判断无解。

#### 题解

### F.

solved by Bazoka13 JJLeo

#### 题意

第 $i$ 条路径的权值是 $2^i$ 。每个点要么是黑色，要么是白色，求所有异色点最短路的长度总和

#### 题解

根据等比数列，显然有前 $i-1$ 项总和小于第 $i$ 项，那么求一个最小生成树然后 $dfs$ 处理两侧异色点数即

可

## G.

upsolved by 2sozx Bazoka13 JJLeo

### 题意

给定  $k$  与  $x$  次询问，每次询问给定一个  $n$

求 
$$\sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \dots \sum_{a_x=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right) \cdot \gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)} \pmod{\{10\}^9+7}$$
 其中  $f(n)$  定义如下：如果存在正整数  $k$  使得  $k^2 | n$  那么  $f(n)=0$  否则  $f(n)=1$   $(1 \leq t \leq 10^4, 1 \leq k \leq 10^9, 1 \leq x \leq 10^9, 1 \leq n \leq 2 \times 10^5)$

### 题解

首先，容易证明以下两个等式成立，以便反演中使用

$$f(n) = |\mu(n)| = \mu^2(n)$$

$$\sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \dots \sum_{a_x=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^k}$$

接下来我们开始反演

$$\sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \dots \sum_{a_x=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right) f(\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x))} = \sum_{d=1}^n \frac{1}{\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)}$$

枚举  $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_x)$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^x (a_j d)^k\right) [\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x) = 1]}$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d)^{kx+1} \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right) [\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x) = 1]}$$

利用  $\epsilon = \mu * 1$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d)^{kx+1} \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right) \sum_p [\gcd(a_1, a_2, \dots, a_x) = p] \mu(p)}$$

枚举  $p$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d)^{kx+1} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \sum_{a_1=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor}$$

$$\left\lfloor \prod_{j=1}^k x_j \right\rfloor$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{kx+1} \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \mu(p) p^{kx} \sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} \dots \sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} \left\lfloor \prod_{j=1}^k x_j \right\rfloor$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d^{kx+1} \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \mu(p) p^{kx} \left( \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} i \right)^k x^k$$

$$= \sum_{d=1}^n \mu^2(d) d \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \mu(p) (dp)^{kx} \left( \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor} i \right)^k x^k$$

令  $T = dp$  枚举  $T$

$$= \sum_{T=1}^n \left( \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor} i \right)^k x^k \sum_{d|T} \mu^2(d) \mu\left(\frac{T}{d}\right) d^k$$

$$= \sum_{T=1}^n \left( \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor} i \right)^k x^k \sum_{d|T} \mu^2(d) \mu\left(\frac{T}{d}\right) d^k$$

设

$$F(n) = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^k x^k$$

$$G(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k$$

则所求式子化为

$$\sum_{T=1}^n F\left(\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor\right) G(T)$$

$O(n \log n)$  分别处理出  $F(n)$  和  $G(n)$  对于每组询问  $O(\sqrt{n})$  整除分块即可，总复杂度  $O(n \log n + t \sqrt{n})$

## H.

solved by

题意

题解

## I.

solved by

## 题意

## 题解

## J.

### solved by

## 题意

## 题解

## K.

### upsolved by

## 题意

## 题解

## 记录

0min 开局分题  
 8min ZYF猜结论 AC I MJX冲B  
 18min MJX WA B  
 28min MJX AC B CSK 冲F  
 60min CSK WA3 换ZYF冲A  
 61min ZYF AC A 冲J  
 66min ZYF AC J 冲E  
 68min CSK AC F  
 101min ZYF AC E  
 101min~210min 自闭ing  
 210min CSK冲D ZYF MJX 冲C  
 269min CSK AC D  
 till end C应该是想错了  
 after end G式子推出来了结果  $n$  范围看错了

## 总结

- MJX 要认真看数据范围，不要把  $10^5$  当作  $10^9$
- CSK 别读错题，别读错题，别读错题，%ZYF
- ZYF 要学习更多的知识点以应对毒瘤的HDU多校，同时不要每次都死在概率与期望上。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer\\_john:2020hdu%E6%9A%91%E6%9C%9F%E5%A4%9A%E6%A0%A1%E7%AC%AC%E5%85%AD%E5%9C%BA&rev=1597997523](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2020hdu%E6%9A%91%E6%9C%9F%E5%A4%9A%E6%A0%A1%E7%AC%AC%E5%85%AD%E5%9C%BA&rev=1597997523)

Last update: 2020/08/21 16:12