2020 Multi-University Training Contest 6

比赛链接

A.

solved by JJLeo

题意

给出一个序列，等概率地选择左右端点$l \le r$求$[l,r]$区间平均数的期望值。

题解

题目本质是问长度为$1,2, \cdots , n$的连续子区间中，每个数各出现了多少次。可以发现如下规律：$$1 1 1 1 1 1 1$$ $$1 2 2 2 2 2 1$$ $$1 2 3 3 3 2 1$$ $$1 2 3 4 3 2 1$$ $$1 2 3 3 3 2 1$$ $$1 2 2 2 2 2 1$$ $$1 1 1 1 1 1 1$$ 因此求出前缀和，对于每个除以一下区间长度，最后再除以总方案数即可。

B.

solved by 2sozx

题意

给出一个式子 $a \ opt \ b \ = \ c$ 中间无空格，问在二至十六进制下哪个进制可以使得等式成立
$opt=+,-,*,/$

题解

模拟即可，注意进制没有一进制，即 $0+0=0$ 最少也是在二进制下成立。

C.

upsolved by

题意

$(10,1,1) (6,4,2) (6,5,1)$ 我裂开

题解

D.

solved by Bazoka13

题意

给定平面里的n个点，每个点有一个种类，共计三个种类，每个种类选出一个点，选出三个点，使得三个点组成的三角形面积最大

题解

1. 显然可以通过枚举某两个种类的点，然后去找距离当前构成的线段距离最远的点，而距离最远的点一定是在第三类点所构成的凸包上，那么只需要求出第三种点的上下凸包，然后跑一个三分即可。
2. 由于不知道是凸凹函数，需要都跑一遍，但是有可能会出现双峰的情况，换一个方向再跑一遍即可。

E.

solved by JJLeo

题意

将1145141919循环无限次得到一个字符串，现在需要选取一个前缀，将这个前缀添加任意数量的$()\times+$使得表达式的值等于x问对于$x=1,2, \cdots , 5000$选取的最短前缀长度是多少，或判断无解。

题解

选取前11个数打个表发现除了$3,7$都有解，然后就完事了。

F.

solved by Bazoka13 JJLeo

题意

第i条路径的权值是2^i每个点要么是黑色，要么是白色，求所有异色点最短路的长度总和

题解

根据等比数列，显然有前$i-1$项总和小于第i项，那么求一个最小生成树然后dfs处理两侧异色点数即可

G.

upsolved by 2sozx Bazoka13 JJLeo

题意

给定k与x，t次询问，每次询问给定一个n，求$$\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{a_2=1}^n\dotsb\sum_{a_x=1}^n\left(\prod_{j=1}^xa_j^k\right)f\left(\gcd\left(a_1,a_2,\dots,a_x\right)\right)\cdot \gcd\left(a_1,a_2,\dots,a_x\right) \pmod{{10}^9+7}$$其中$f(n)$定义如下：如果存在正整数k使得$k^2|n$，那么$f(n)=0$，否则$f(n)=1$。$$(1\le t \le 10^4,1\le k\le 10^9,1\le x\le 10^9,1\leq n\leq 2\times10^5)$$

题解

首先，容易证明以下两个等式成立，以便反演中使用

$$f(n)=|\mu(n)|=\mu^2(n)$$

$$\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{a_2=1}^n\dotsb\sum_{a_x=1}^n\left(\prod_{j=1}^xa_j^k\right)=\left(\sum_{i=1}^ni^k\right)^x$$

接下来我们开始反演

$$\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{a_2=1}^{n}\ldots \sum_{a_x=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{x}a_j^k\right)f(\gcd(a_1,a_2,\ldots ,a_x))\cdot \gcd(a_1,a_2,\ldots ,a_x)$$

枚举$d=\gcd(a_1,a_2,\ldots ,a_x)$

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\sum_{a_2=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\dotsb\sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\left(\prod_{j=1}^x(a_jd)^k\right)[\gcd\left(a_1,a_2,\dots,a_x\right)=1]$$

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d^{kx+1}\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\sum_{a_2=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\dotsb\sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\left(\prod_{j=1}^xa_j^k\right)[\gcd\left(a_1,a_2,\dots,a_x\right)=1]$$

利用$\epsilon = \mu * 1$

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d^{kx+1}\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\sum_{a_2=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\dotsb\sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\left(\prod_{j=1}^xa_j^k\right)\sum_{p|\gcd(a_1,a_2,\dots,a_x)}\mu(p)$$

枚举p

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d^{kx+1}\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\mu(p)\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}\sum_{a_2=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}\dotsb\sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}\left(\prod_{j=1}^x(a_jp)^k\right)$$

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d^{kx+1}\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\mu(p)p^{kx}\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}\sum_{a_2=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}\dotsb\sum_{a_x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}\left(\prod_{j=1}^xa_j^k\right)$$

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d^{kx+1}\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\mu(p)p^{kx}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}i^k\right)^x$$

$$=\sum_{d=1}^n\mu^2\left(d\right)d\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}\mu(p){(dp)}^{kx}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{dp} \right\rfloor}i^k\right)^x$$

令$T=dp$，枚举T

$$=\sum_{T=1}^n{T}^{kx}\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor}i^k\right)^x\sum_{d|T}\mu^2\left(d\right)\mu(\frac{T}{d})d$$

$$=\sum_{T=1}^n\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor}i^k\right)^x{T}^{kx}\sum_{d|T}\mu^2\left(d\right)\mu(\frac{T}{d})d$$

设

$$F(n)=\left(\sum_{i=1}^{n}i^k\right)^x$$

$$G(n)={n}^{kx}\sum_{d|n}\mu^2\left(d\right)\mu(\frac{n}{d})d$$

则所求式子化为

$$\sum_{T=1}^{n}F(\left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor)G(T)$$

$O(n \log n)$分别处理出$F(n)$和$G(n)$，对于每组询问$O(\sqrt{n})$整除分块即可，总复杂度$O(n \log n + t \sqrt{n})$。

H.

upsolved by JJLeo

题意

题解

I.

solved by JJLeo

题意

给定b和x□问是否满足**一个数是x的倍数**等价于**该数在b进制下的各数位上数字之和是x的倍数**□

题解

最常见的满足条件的有十进制下的3和9，盲猜满足条件等价于$x \equiv 1 \pmod{b}$就过了。

J.

solved by JJLeo

题意

题解

K.

upsolved by

题意

题解

记录

0min□开局分题
8min□ZYF猜结论 AC I □MJX冲B
18min□MJX WA B
28min□MJX AC B□CSK 冲F
60min□CSK WA3□换ZYF冲A
61min□ZYF AC A□冲J
66min□ZYF AC J□冲E
68min□CSK AC F
101min□ZYF AC E
101min~210min□自闭ing
210min□CSK冲D□ZYF MJX 冲C

269min：CSK AC D
till end：C应该是想错了
after end：G式子推出来了结果 n 范围看错了

总结

- MJX：要认真看数据范围，不要把 10^5 当作 10^9
- CSK：别读错题，别读错题，别读错题，~~% ZYF~~
- ZYF：要学习更多的知识点以应对毒瘤的HDU多校，同时不要每次都死在概率与期望上。