

格式

1. 向量建议写成 $\mathbf{x}_0$

内容

1. 没有例题吗

知识点

前言

对于一元函数的极值问题相信大家都十分熟悉，但是对于多元函数的极值问题可能就会比较陌生。大家都学过淑芬怎么可能陌生呢

对于没有限制条件的多元函数来说，只需要对函数求导即可，但是若有了限制条件，即函数的值要在一定条件下才能取到，则需要用到拉格朗日乘子法。

引理

设函数 $f(\mathbf{x})$

$\varphi(\mathbf{x})=(\varphi_1(\mathbf{x}),\varphi_2(\mathbf{x}),\cdots,\varphi_m(\mathbf{x}))$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ ($m<n$) 内具有各个连续偏导数，再设 $\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$

为 $f(\mathbf{x})$ 在约束条件 $\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x})=0 \\ \varphi_2(\mathbf{x})=0 \\ \vdots \\ \varphi_m(\mathbf{x})=0 \end{cases}$ 下的极值点，

并且 $\varphi'_i(\mathbf{x}_0)$ 的秩为 m 则存在常数

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ 使得在 $\mathbf{x}_0$ 处成立下述等式 $\begin{cases} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^m\lambda_j\frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ \varphi_j(\mathbf{x}_0)=0 \quad (j=1,2,\cdots,m) \end{cases}$

证明

由于 $\varphi'_i(\mathbf{x}_0)$ 的秩为 m 我们不妨设行列

式 $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{\partial(x_{n-m+1},x_{n-m+2},\cdots,x_n)}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处不为零。因此，在 $\mathbf{x}_0$ 的某个邻域内唯一确定一组具有各个连续偏导数的隐函数 $\begin{cases} x_{n-m+1}=g_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}) \\ x_{n-m+2}=g_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}) \\ \vdots \\ x_n=g_m(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}) \end{cases}$ 满足 $x_j^0=g_j(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-m}^0)$ ($j=n-m+1,n-m+2,\cdots,n$) 且有 $\varphi_k(x_1,\cdots,x_{n-m},g_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}))=0$ 将隐函数组代入 $f(\mathbf{x}_0)$ 得 $f(x_1,\cdots,x_{n-m},g_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_{n-m}))$ 因此 $\mathbf{x}_0$ 是条件极值点转化为 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-m}^0)$ 为上述函数的通常极值点。

令 $\mathbf{x}_0'$ 则对 $i=1,2,\cdots,n-m$

有 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0')}{\partial x_i}+\frac{\partial f(\mathbf{x}_0')}{\partial x_{n-m+1}}\cdots\frac{\partial f(\mathbf{x}_0')}{\partial x_n}+\frac{\partial f(\mathbf{x}_0')}{\partial x_{n-m+1}}\cdots\frac{\partial f(\mathbf{x}_0')}{\partial x_n}=0$

令

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})' = (g_1(\mathbf{x}'), g_2(\mathbf{x}'), \dots, g_m(\mathbf{x}'))^T$$

其中 $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ 将上述 $n-m$ 个等式写成向量形式,

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) + \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)' = 0$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) \leq -A^{-1}B$$

注意到 $\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \cdot A^{-1}$ 是一个 m 维行向量, 我们可以将其记为 $\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \cdot A^{-1} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 将

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \left(\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}}, \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) = 0$$

另外我们可以将 $\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \left(\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}}, \dots, \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)$

$$\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} \& \cdots \& \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \backslash \vdots \& \vdots \& \ddots \& \vdots \backslash \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} \& \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} \& \cdots \& \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{array} \right) = 0 \quad \text{tag{5}} \quad \text{\$}$$
 将 $\left(4\right), \left(5\right)$ 写成分量形式再加上约束条件即可证明。

拉格朗日乘子法

构造函数 $F(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$ 则上述求条件极值点的必要条件形式转化为 F 的通常极值的必要条件

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \\ \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$
 此即拉格朗日乘子法

例题

CF813C

- 题意：给定整数 a, b, c, s 求使得 $x^a y^b z^c$ 最大的实数 x, y, z 其中 $x+y+z \leq s (1 \leq s \leq 10^3, 0 \leq a, b, c \leq 10^3)$
- 题解：对于 $x, y, z > 0$ 时显然取 $x+y+z=s$ 时会比 $x+y+z < s$ 时更优；对于 $xyz=0$ 时取 $x+y+z=s$ 不会比 $x+y+z < s$ 劣。因此可以将限制条件改为 $x+y+z=s$ 即可。令 $G(x, y, z) = x+y+z-s$ $F(x, y, z) = a \ln x + b \ln y + c \ln z$ $H(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$ 套用拉格朗日乘子法即可得到 $x = \frac{as}{a+b+c}, y = \frac{bs}{a+b+c}, z = \frac{cs}{a+b+c}$ 注意 $a+b+c=0$ 时需要特判。
- 对于所求表达式为乘积的形式时，可以取对数，如上题中 $F(x, y, z) = a \ln x + b \ln y + c \ln z$ 此时求出的极值点依旧为原表达式的极值点，具体问题需要具体分析。
- 一般来说使用拉格朗日乘子法时需要注意边界条件，此题 x, y, z 为边界条件时表达式值一定不会优于最大值，所以可以不考虑边界。注意边界值并不是 0 。

一道没有来源的题目

- 题意：平面上有 $n (n \leq 8)$ 个点，告诉你每个点距离原点的距离，求这 n 个点所围成的凸包的最大面积
- 题解：枚举哪些点在凸包上，并且这些点极角排序后的顺序。假设极径依次为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 面积 $S = \frac{1}{2} (r_1 r_2 \sin \theta_1 + r_2 r_3 \sin \theta_2 + \cdots + r_{n-1} r_n \sin \theta_n)$ 并且 $\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$ 令 $F(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) = S + \lambda g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ ，其中 $g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) = \sum_{i=1}^n \theta_i - 2\pi$ 。由拉格朗日乘子法，解得 $-\lambda = r_1 r_2 \cos \theta_1 = r_2 r_3 \cos \theta_2 = \cdots = r_{n-1} r_n \cos \theta_n$ ，可二分 λ ，求出满足 $g=0$ 的解，此时对应的 θ 就是当前条件下面积的最大值。
- 注：其实枚举点在凸包上时这些点并非一定会构成凸包，但是这样的面积一定不会是最大的，对于答案并没有影响。
- 这道题是同学出的，并没有具体数据。

NOI2012骑行川藏

- 题意 n 段路，每段路有三个参数 s_i, k_i, v_i ，其中 s_i 表示这段路的长度 k_i 表示这段路的风阻系数 v_i 表示这段路上的风速。若在一段路上的速度为 v_i 消耗的能量为 $E_i = k_i(v_i - v_i')^2 s_i$ 初始有体能值 E_U 问在有限的体力内到达目的地的最短时间是多少。
- 题解：显然体能值要尽量用光会更优。若 $v_i < v_i'$ 则取 $V = 2v_i - v_i'$ 两个速度消耗的能量是相同的，而且 V 优于 v_i 因此我们可以默认一段路的 $v_i \geq v_i'$ 题目即求在 $\sum_{i=1}^n E_i = E_U$ 的条件下 $T = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{v_i}$ 的最小值。套用拉格朗日乘子法可知 $\lambda = \frac{1}{2k_i v_i (v_i - v_i')^2}$ 根据假设 $v_i \geq v_i'$ 可知 $\frac{1}{2k_i v_i (v_i - v_i')^2}$ 单调，因此可以通过二分 λ 来求解答案。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2sozx:%E6%95%B0%E5%AD%A6:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9

Last update: 2020/06/12 22:13

