

### 格式

- 1. 向量建议写成  $\mathbf{x}_0$

### 内容

- 1. 没有例题吗

## 知识点

### 前言

对于一元函数的极值问题相信大家都十分熟悉，但是对于多元函数的极值问题可能就会比较陌生。大家都学过淑芬怎么可能陌生呢

对于没有限制条件的多元函数来说，只需要对函数求导即可，但是若有了限制条件，即函数的值要在一定条件下才能取到，则需要用到拉格朗日乘子法。

### 引理

设函数  $f(\mathbf{x})$

$\varphi(\mathbf{x})=(\varphi_1(\mathbf{x}),\varphi_2(\mathbf{x}),\dots,\varphi_m(\mathbf{x}))$  在区域  $D\subset \mathbb{R}^n (m<n)$  内具有各个连续偏导数，再设  $\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D$

为  $f(\mathbf{x})$  在约束条件  $\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x})=0 \\ \varphi_2(\mathbf{x})=0 \\ \vdots \\ \varphi_m(\mathbf{x})=0 \end{cases}$  下的极值点，

并且  $\varphi'(\mathbf{x}_0)$  的秩为  $m$  则存在常数

$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$  使得在  $\mathbf{x}_0$  处成立下述等式  $\begin{cases} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\dots,n) \\ \varphi_j(\mathbf{x}_0)=0 \quad (j=1,2,\dots,m) \end{cases}$

### 证明

由于  $\varphi'(\mathbf{x}_0)$  的秩为  $m$  我们不妨设行列

式  $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m)}{\partial(x_{n-m+1},x_{n-m+2},\dots,x_n)}$  在  $\mathbf{x}_0$  处不为零。因此，在  $\mathbf{x}_0$  的某个邻域内唯一确定一组具有各个连续偏导数的隐函数  $\begin{cases} x_{n-m+1}=g_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}) \\ x_{n-m+2}=g_2(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}) \\ \vdots \\ x_n=g_m(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}) \end{cases}$  满足  $x_j^0=g_j(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{n-m}^0) (j=n-m+1,n-m+2,\dots,n)$  且有  $\varphi_k(x_1,\dots,x_{n-m},g_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}),\dots,g_m(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}))=0$  将隐函数组代入  $f(\mathbf{x}_0)$

得  $f(x_1,\dots,x_{n-m},g_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}),\dots,g_m(x_1,x_2,\dots,x_{n-m}))$  因此  $\mathbf{x}_0$  是条件极值点转化为  $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{n-m}^0)$  为上述函数的通常极值点。

令  $\mathbf{x}_0$  则对  $i=1,2,\dots,n-m$

有  $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}\cdots\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}+\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}\cdots\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=0$

令

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$$
 其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$  将上述  $n-m$  个等式写成向量形式，有
 
$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) + \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$$
 由于  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = -\left( \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} & & \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} & & \end{array} \right) \triangleq -A^{-1}B$ 
 注意到  $-\left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \cdot A^{-1}$  是一个  $m$  维行向量，我们可以将其记为  $-\left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \cdot A^{-1} = \left( \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \right)$  将  $\left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) + \left( \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \right) \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} & & \end{array} \right) = 0$ 
 另外我们可以将  $\left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) + \left( \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \right) \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} & & \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} & & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & & \end{array} \right)$

$$\begin{matrix} \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & & \\ \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{matrix} \end{matrix} = 0$$
 将  $(4), (5)$  写成分量形式再加上约束条件即可证明。

## 拉格朗日乘子法

构造函数  $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$  则上述求条件极值点的必要条件形式转化为  $F$  的通常极值的必要条件 
$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \end{cases}$$
 此即拉格朗日乘子法

## 例题

### CF813C

- 题意：给定整数  $a, b, c, s$  求使得  $x^a y^b z^c$  最大的实数  $x, y, z$  其中  $x+y+z \leq s (1 \leq s \leq 10^3, 0 \leq a, b, c \leq 10^3)$
- 题解：对于  $x, y, z > 0$  时显然取  $x+y+z=s$  时会比  $x+y+z < s$  时更优；对于  $xyz=0$  时取  $x+y+z=s$  不会比  $x+y+z < s$  劣。因此可以将限制条件改为  $x+y+z=s$  即可。套用拉格朗日乘子法即可得到  $x = \frac{as}{a+b+c}, y = \frac{bs}{a+b+c}, z = \frac{cs}{a+b+c}$  注意  $a+b+c=0$  时需要特判。
- 对于所求表达式为乘积的形式时，如上题，可以令  $F(x, y, z) = a \ln x + b \ln y + c \ln z$  此时求出的极值点依旧为原表达式的极值点，具体问题需要具体分析。
- 一般来说使用拉格朗日乘子法时需要注意边界条件，此题  $x, y, z$  为边界条件时表达式值一定不会优于最大值，所以可以不考虑边界。注意边界值并不是  $0$ 。

### 一道没有来源的题目

- 题意：平面上有  $n (n \leq 8)$  个点，告诉你每个点距离原点的距离，求这  $n$  个点所围成的凸包的最大面积
- 题解：枚举哪些点在凸包上，并且这些点极角排序后的顺序。假设极径依次为  $r_1, r_2, \dots, r_n$  面积  $S = \frac{1}{2} (r_1 r_2 \sin \theta_1 + r_2 r_3 \sin \theta_2 + \dots + r_{n-1} r_n \sin \theta_{n-1})$  且  $\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$  令  $F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = S + \lambda g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  其中  $g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \sum_{i=1}^n \theta_i - 2\pi$ 。由拉格朗日乘子法，解得  $-\lambda = r_1 r_2 \cos \theta_1 = r_2 r_3 \cos \theta_2 = \dots = r_{n-1} r_n \cos \theta_n$ ，可二分  $\lambda$ ，求出满足  $g=0$  的解，此时对应的  $\theta$  就是当前条件下面积的最大值。
- 注：其实枚举点在凸包上时这些点并非一定会构成凸包，但是这样的面积一定不会是最大的，对于答案并没有影响。
- 这道题是同学出的，并没有具体数据。

Last update: 2020-2021:teams:farmer\_john:2sozx: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer\\_john:2sozx:%E6%95%B0%E5%AD%A6:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9&rev=1591967697](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2sozx:%E6%95%B0%E5%AD%A6:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9&rev=1591967697)  
2020/06/12 21:14 数学:知识点

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer\\_john:2sozx:%E6%95%B0%E5%AD%A6:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9&rev=1591967697](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2sozx:%E6%95%B0%E5%AD%A6:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9&rev=1591967697) 

Last update: 2020/06/12 21:14