

题意

给定一个 $n \times n$ 的正定二次型 A 以及 $1 \times n$ 的 B 找到 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足 $X^T A X \leq 1$ 并且使得 BX^T 最大，求最大值的平方 $n \leq 200$

题解

答案即为 $BA^{-1}B^T$

证明

这道题即为 KKT 模板。

令 $F(x) = BX^T + \lambda(XAX^T - 1)$ 则取极值的条件

为 $\begin{cases} B_i + 2\lambda \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j = 0 \\ XAX^T - 1 \leq 0 \\ \lambda (XAX^T - 1) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$ 易知 $X = \frac{-B(A^{-1})^T}{2\lambda}$ ，代入 $\lambda(XAX^T - 1) = 0$ 可知 $\frac{BA^{-1}B^T}{4\lambda^2} = 1$

最大值的平方则为 $(BX^T)(BX^T) = \frac{BA^{-1}B^T BA^{-1}B^T}{4\lambda^2} = BA^{-1}B^T$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:2sozx:%E7%89%9B%E5%AE%A2%E5%A4%9A%E6%A0%A1%E7%AC%AC%E4%B8%80%E5%A4%A9d

Last update: 2020/07/17 16:26