

暑假题目汇总

CF809E

题意

给出一棵 $n(2 \leq n \leq 2 \times 10^5)$ 个节点的树，边权为 1。给定一个 1 到 n 的排列 a_i ，设 $\text{dist}(i, j)$ 为树上两点间距离，求 $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(a_i \cdot a_j) \text{dist}(i, j) \pmod{10^9+7}$ 。

题解

因为 a_i 是 1 到 n 的排列，所以我们可以设 $p_{a_i} = i$ 。同时有以下结论： $\varphi(nm) = \frac{\varphi(n)\varphi(m)\gcd(n, m)}{\varphi(\gcd(n, m))}$ 。因此扔掉前面的分母 $n(n-1)$ ，原式转化为 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(i)\varphi(j)\gcd(i, j) \text{dist}(p_i, p_j)}{\varphi(\gcd(i, j))}$ 。开始反演，枚举 $d = \gcd(i, j)$ ， $\sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(id)\varphi(jd) \text{dist}(p_{id}, p_{jd}) [\gcd(i, j)=1]$ 。套用 $\epsilon = \mu * 1$ ， $\sum_{d=1}^n \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{dp} \rfloor} \varphi(idp)\varphi(jdp) \text{dist}(p_{idp}, p_{jdp})$ 。枚举 $T = dp$ ， $\sum_{T=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT) \text{dist}(p_{iT}, p_{jT}) \frac{\mu(\frac{T}{d})d}{\varphi(d)}$ 。设 $f(T) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} \varphi(iT)\varphi(jT) \text{dist}(p_{iT}, p_{jT})$ ， $g(T) = \sum_{d|T} \frac{\mu(\frac{T}{d})d}{\varphi(d)}$ 。则原式转化为 $\sum_{T=1}^n f(T)g(T)$ 。其中 $g(T)$ 可以在 $O(n \log n)$ 的时间求出，考虑 $f(T)$ 本质相当于给 p_i 点一个权值 $\varphi(i)$ ，然后把所有下标为 T 的倍数点 p_i 拿出来建虚树，跑一遍将每条边的长度乘以两侧节点权值和即可，总结点数是 $O(n \log n)$ 的，因此总复杂度为 $O(n \log n)$ 。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:jjleo:%E6%9A%91%E5%81%87%E9%A2%98%E7%9B%AE%E6%B1%87%E6%80%BB

Last update: 2020/08/28 16:15