

# WQS二分

- wqs二分可以解决形如在 $n$ 个物品中选 $k$ 个物品最大化/最小化总价值。直接dp一般是 $O(nk)$ 的，而如果题目满足下面的条件并且可以用 $O(n)$ 时间在不考虑选择物品个数的情况下计算出最大值/最小值，就可以用wqs二分做到 $O(n \log n)$
- 以最大化价值为例，设 $x$ 表示选择物品的个数，设 $f(x)$ 表示选 $x$ 个物品的最大值，如果 $f(x)$ 关于 $x$ 是凸函数或凹函数，那么图象就是一个凸包。虽然我们不知道具体凸包长什么样，但是我们可以利用凸包的性质，通过二分直线的斜率使得这条直线与 $(k, f(k))$ 这个点“相切”，从而间接得到 $f(k)$ 的值。
- 以凸函数为例，由于图像是一个凸包，所以一条直线，如果能让直线与图象有交点的情况下截距最大，那么直线一定恰好经过凸包上的一个点，此时我们通过下面的方法求出这个点后，如果这个点的横坐标 $< k$ 那么减少斜率，否则增大斜率。
- 设直线为斜率为 $mid$ 直线方程即为 $y = mid \times x + b$ 那么截距为 $y - mid \times x$ 当直线经过每个点时截距为 $f(x) - mid \times x$ 设经过 $z$ 时截距最大，那么 $\max\{f(x) - mid \times x\} = f(z) - mid \times z$ 也就是说如果给每个物品的价值减少 $mid$ 那么最大化价值时选择的物品数就是 $z$ 此时不用考虑需要选择的物品数，只需要记录每个状态选择了几个物品即可，一般通过一次dp即可获得结果。假设最后得到的斜率为 $l$ 此时最大截距为 $b$ 那么答案即为 $b + l * k$
- 需要注意，一般题目中的 $f(x)$ 可能并不是严格凸或者严格凹，因此可能出现连续的点对应斜率相同，二分的时候要注意边界问题。
- 可以开一个结构体记录dp状态的最大值以及取得此时最大值的选取物品数，大幅简化代码编写的复杂度。

## CF739E

- 题意:抓宝可梦，有 $n$ 个宝可梦和 $a$ 个普通球和 $b$ 个超级球，每种球抓到每个宝可梦的概率不同，对一个宝可梦可以不用球、只用普通球或超级球、两种球都用（抓到只算一个），求抓到宝可梦数量期望的最大值。
- 题解:可以发现，只考虑某一种球的情况下，用 $x$ 个该球能抓到宝可梦数量期望是上凸的，因此可以用wqs二分套wqs二分。外层二分普通球的斜率，内层二分超级球的斜率。

## 林克卡特树

- 题意:给出一颗 $n$ 个节点的树，每条边有边权，从中挑选 $k+1$ 个互不相交的链，使得所有被选中的边的权值和最大。
- 题解:设 $f(x)$ 为选择 $x$ 个互不相交的链的边权最大值，这个函数也是上凸的，太菜了不会证。然后就可以wqs二分转化为树形dp，每条链附加一个 $-mid$ 的权值即可。这个树形dp的过程非常巧妙，通过微调枚举顺序减少了代码的复杂度。设 $f[x][i]$ 表示只考虑点 $x$ 所在的子树，且点 $x$ 的度为 $i$ 时的最大权值，因为只能出现链所以 $0 \leq i \leq 2$ 子树中代码如下，注意枚举顺序不能改，因为前两个转移都用到了上次的结果。

```
void dfs(int i, int fa){
    f[i][0] = Data(0, 0), f[i][1] = f[i][2] = Data(-mid, 1);
    for(int j = 0; j < v[i].size(); j++){
        int x = v[i][j].first, y = v[i][j].second;
        if(x == fa) continue;
        dfs(x, i);
        Data g = max(f[x][0], max(f[x][1], f[x][2]));
        f[i][2] = max(f[i][1] + f[x][1] + Data(y + mid, -1), f[i][2] +
```

```
g);  
    f[i][1] = max(f[i][0] + f[x][1] + Data(y, 0), f[i][1] + g);  
    f[i][0] = max(f[i][0], f[i][0] + g);  
    }  
}
```

## Tree I

- 题意:给出一个 $n$ 个点的图，每条边有权值和黑白色两种颜色，求恰好有 $k$ 条白边的最小生成树。
- 题解:设 $f(x)$ 为选 $x$ 个白边的最小生成树，这个函数是下凸的。给每个白边减去 $\text{mid}$ 跑Kruskal即可。这里优先选白边，那么每次得到的是数个共线点中最靠右的点，二分边界时要注意一下。

## CF1279F

- [F题](#)

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer\\_john:jjleo:wqs%E4%BA%8C%E5%88%86&rev=1593097417](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:farmer_john:jjleo:wqs%E4%BA%8C%E5%88%86&rev=1593097417)

Last update: 2020/06/25 23:03