团队训练

2020暑假精选题目

本周推荐

2sozx

CF 1396D Rainbow Rectangles

- 分类：线段树□ set
- 题意□$L \times L$ 的网格平面，其中有 n 的点，每个点在网格的中心。每个点有一个颜色，总共有 k 个颜色，现在求多少个矩形包含了所有 k 种颜色□$n,k \le 2000, L \le 10^9$
- 题解：
  - 首先我们可以枚举矩形的左边和右边所在的 x□先固定矩形的左侧边缘 x_l□向右侧扫。对于每个点记录 pre_i 为在区间内颜色相同□y 值小于等于自己的点的 y 值；nxt_i 为在区间内颜色相同□y 值大于等于自己的点的 y 值。
  - 考虑先将 $x_l \sim L$ 内部所有点都考虑到。令 $f(i)$ 表示纵坐标为 i 要满足包含 k 个颜色的最低 y 值，显然随着 i 的下降 f_i 是单调不增的，这为下面的操作提供了复杂度的保证。考虑左右侧确定时的答案是多少□$ans = \sum_{i = 0}^{L} (L + 1 - f_i)$□可以用线段树维护 f_i 的和。
  - 现在考虑删除矩形右侧的一列，对于一个点 i 被删除，那么 $pre_i + 1 \sim y_i$ 的点的 f 值显然要和 nxt_i 取最大值，这个也可以用线段树维护，由于 f_i 的单调性，线段树的复杂度是正确的，每次删除后统计答案即可，复杂度 $O(n^2\log(n))$ □
- comment□写的太容易出bug了，写完感觉神清气爽

Bazoka13

题目名称

- 分类：
- 题意：
- 题解：
- comment□

JJLeo

CF1396E Distance Matching

- 分类：树上问题，树的重心。

- 题意：给你一棵n个节点的树，保证n为偶数，边权为1，问是否存在一个完美匹配，使得两两点之间距离之和恰好等于k。$(n \le 10^5, k \le n^2)$

- 题解：我们考虑一条边，它将整棵树分为两部棵子树，大小分别为x和$n-x$，两者奇偶性相同。所有两点位于两侧的匹配都会经过这条边，而其它匹配一定是在各自子树内完成的，因此这条边被经过的次数的奇偶性一定和x相同，同时也有一个显然的上界$\min(x,n-x)$，设该边贡献的权值为a，则有$(x \mod 2)\le a \le \min(x, n - x)$。

- 我们以树的重心为根，那么除了根节点外，以每个节点为根的子树都小于另一部分，即$\min(x,n-x)=x$，因此对于每一条边我们可以得到公式$\sum (siz_i\mod 2) \le k \le \sum siz_i$，且$k$的奇偶性和$\sum siz_i$相同。下面通过构造证明这个必要条件也是充分的。

- 将根节点的每个子树中的点都和另一个子树匹配，总权值就是$\sum siz_i$，因为重心为根，每个子树大小不超过总体的一半，因此该匹配是存在的。现在我们可以通过如下的方案将总权值减少到不小于$\sum (siz_i\mod 2)$的任意与$\sum siz_i$奇偶性相同的值：

- 我们每次考虑根节点的各个子树，每次都考虑未匹配节点数最多的那个子树，我们每次将该子树中的两个点x,y进行匹配（而不是像上述所说各自匹配到根节点另外子树的节点），对最终权值的减少量为$2\cdotdep_{\operatorname{lca}(x,y)}$，因此我们只需不断地寻找两个合适的点进行匹配，使得最终权值不断减少直到k，最后，因为我们每次都相当于让最大子树的节点数减少两个，因此根节点一直都是重心，最后只需将剩余点按dfn序排序，贪心地令i和$i+\frac{|v|}{2}$匹配即可（类似2020牛客第二场那题）。

- 具体实现过程我们只需要开个大根堆维护最大的子树，再开个set维护每个子树中存在一个及以上儿子的节点（不然没办法让它成为lca）及其深度，并且每次优先选择最深的点删除即可。

- comment：完美利用了树的重心性质。

CF1400G Mercenaries

- 分类：组合数学，容斥。

- 题意：n个人，选出一个非空子集，第i个人要求如果他被选出来那么子集的大小必须在$[l_i,r_i]$，同时有m个限制，形如第a_i个人和第b_i个人不能同时被选，问合法的选择方案数量，对998244353取模。$(1 \le n \le 3 \cdot 10^5, 0 \le m \le \min(20, \dfrac{n(n-1)}{2}))$

- 题解：如果没有第二个限制，只需要对所有区间差分一下然后枚举人数就完成了。因此我们考虑使用容斥进行计算违反了第二个限制的方案并将其减去。设f_{S}为至少包含状态S中的矛盾的方案数，其中S是一个二进制数，最终答案即为$$\sum_{S=0}^{2^m-1}(-1)^{\operatorname{popcount}(S)}f_S$$我们设不考虑第二个限制，允许自己所在队伍有i个人的数量为c_i，状态为S时所包含的人数为cnt_S，他们的区间交集为$[L_S,R_S]$那么有$$f_S=\sum_{i=L_S}^{R_S}\binom{n-cnt_S}{i}$$其中cnt_S不超过2m，因此我们在$O(nm)$的时间内预处理出$$g_{i,j}=\binom{n-i}{j}$$的前缀和，从而$O(1)$得到f_S，最后用总方案数减去不合法方案数即可，总时间复杂度为$O(nm+m2^m)$。

- comment：非常巧妙地在第一个限制的基础上套用容斥解决了第二个限制。

个人训练

2sozx

比赛

- 2020.08.29 Namomo Fish(Easy) Round 1
- 2020.08.29 AtCoder Beginner Contest 177

题目

Bazoka13

比赛

题目

JJLeo

比赛

题目