

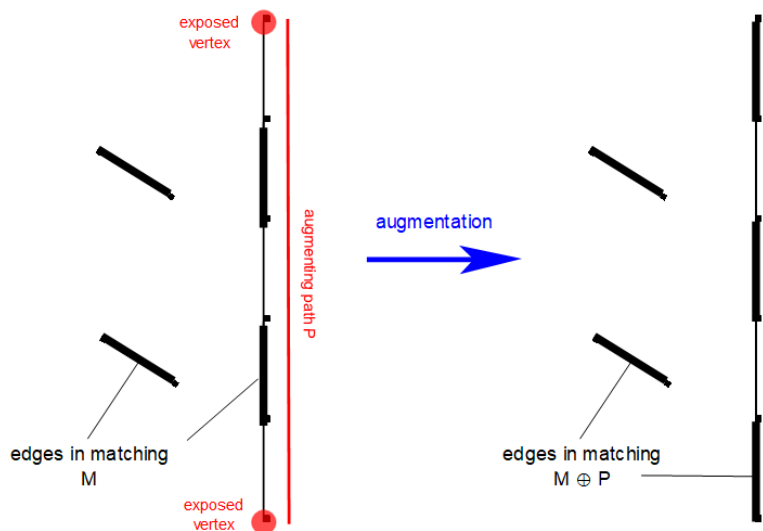
# 带花树

带花树是解决一般图的最大匹配的算法。

## 增广路

由于涉及到最大匹配，我们这里对增广路进行一个简短的介绍：

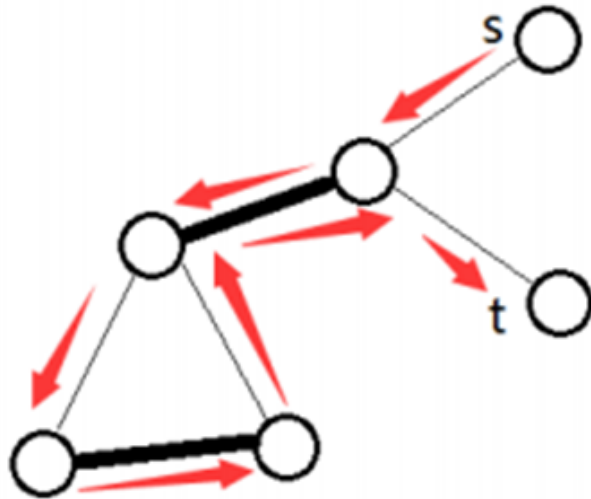
- 1.如果在一个  $M$  匹配的图  $G$  中，有一个点  $v$  是孤立的指没有与其匹配的点。一条在  $G$  中的路径如果其边在  $M$  中交替出现，则称为交错路  $\square$ alternating path  $\square$ 。一条增广路  $\square$ augmenting path  $\square$   $P$  是一条开始并结束于不相同的孤立点的交错路。
- 2.在增广路中不是匹配的边比是匹配的边多，因此增广路的边条数为奇数。
- 3.一个匹配在增广路上的增广即为异或操作  $\square M1 = M \text{ xor } P \square$



## 一般图中增广路与二分图的区别

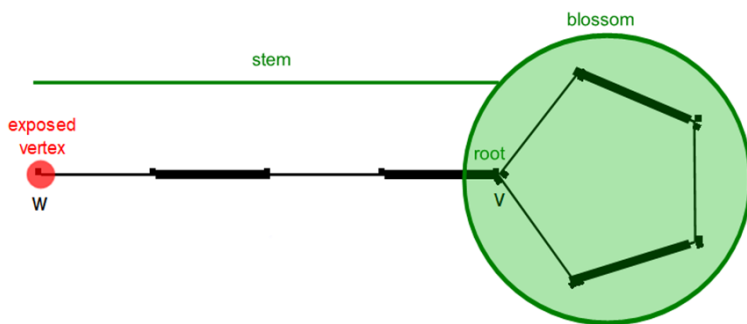
考虑下我们之前在二分图中找增广的过程：

- 1.我们寻找增广路的时候，会将路径上的点黑白染色，匹配只存在于黑点白点之间。
- 2.如果没有环或是只有偶环（二分图中只有偶环），那么每个点的颜色是确定的。
- 3.但是如果出现了奇环，那么点的颜色不再确定，因为奇环顺时针走一圈和逆时针走一圈的染色结果是不同的。（如下图所示，模拟一次增广的染色，我们可以明显发现进入奇环的那个点的染色结果出现冲突）



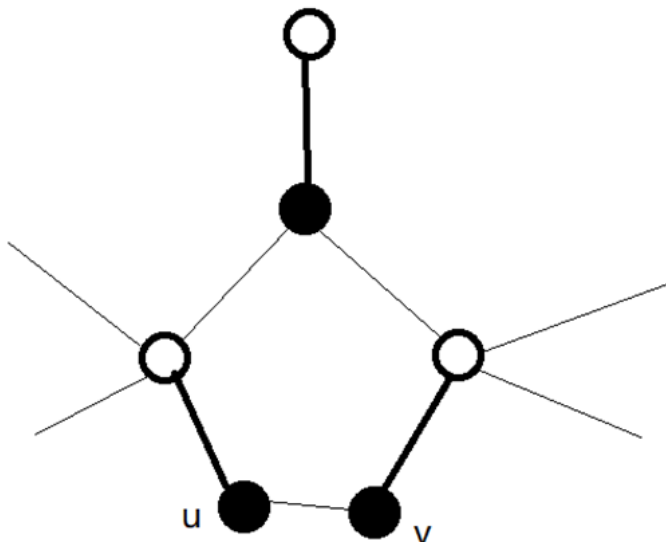
## 花与收缩的定义

在一个  $M$  匹配的图  $G$  中，一朵花  $B$  是一个图  $G$  中的包含  $2k+1$  条边的奇环，其中  $k$  条边在  $M$  中，并存在从环上任意一个点  $v$  (花根) 到一个孤立点  $w$  的交错路 (花茎)。



## 如何找到一朵花

1. 从一个孤立的点  $w$  开始遍历图。
2. 从孤立点  $w$  开始遍历，标记  $w$  为  $S$  型点 [out of  $M$ ]
3. 交替地用  $S$  和  $O$  标记结点，保证无两个相邻节点有标记。
4. 如果找到两个相邻结点含有标记  $O$  那么我们就找到了一个奇环和一朵花。

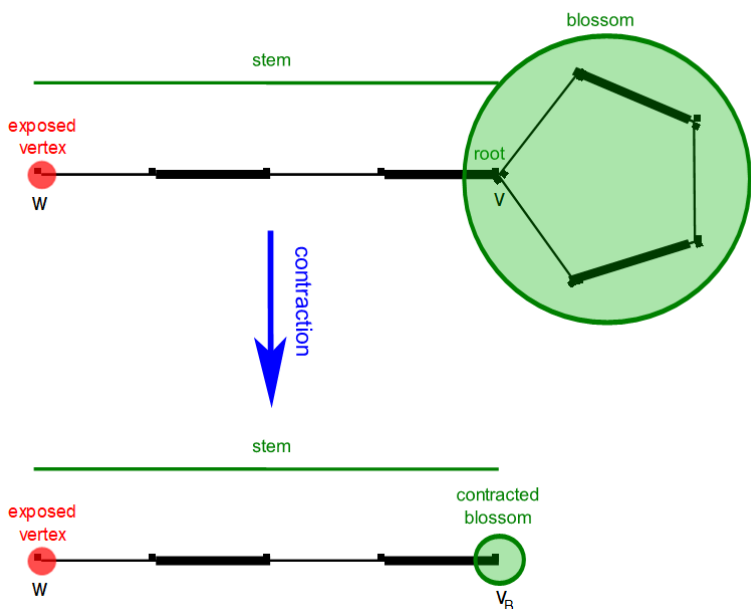


### 收缩的定义

定义收缩图  $G'$  是图  $G$  将所有花  $B$  缩为点后的图。

定义收缩匹配  $M'$  是在  $G'$  中的匹配  $M$

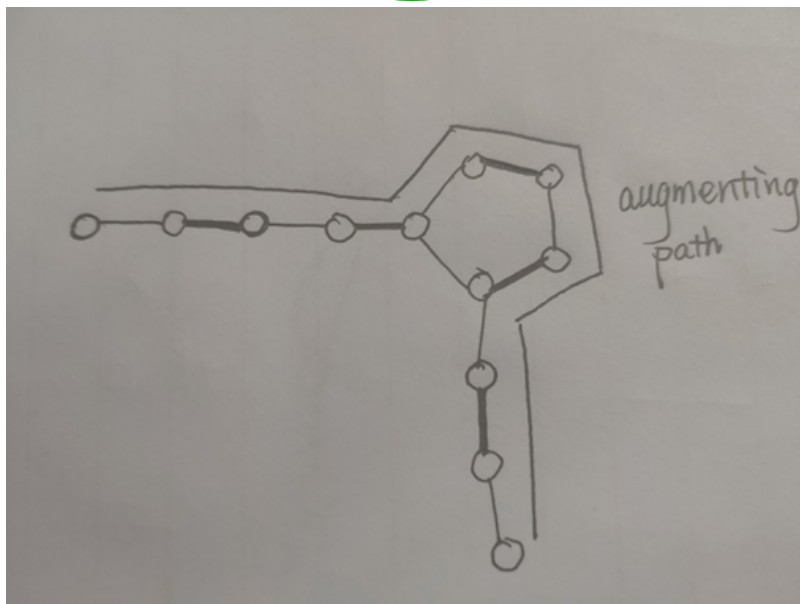
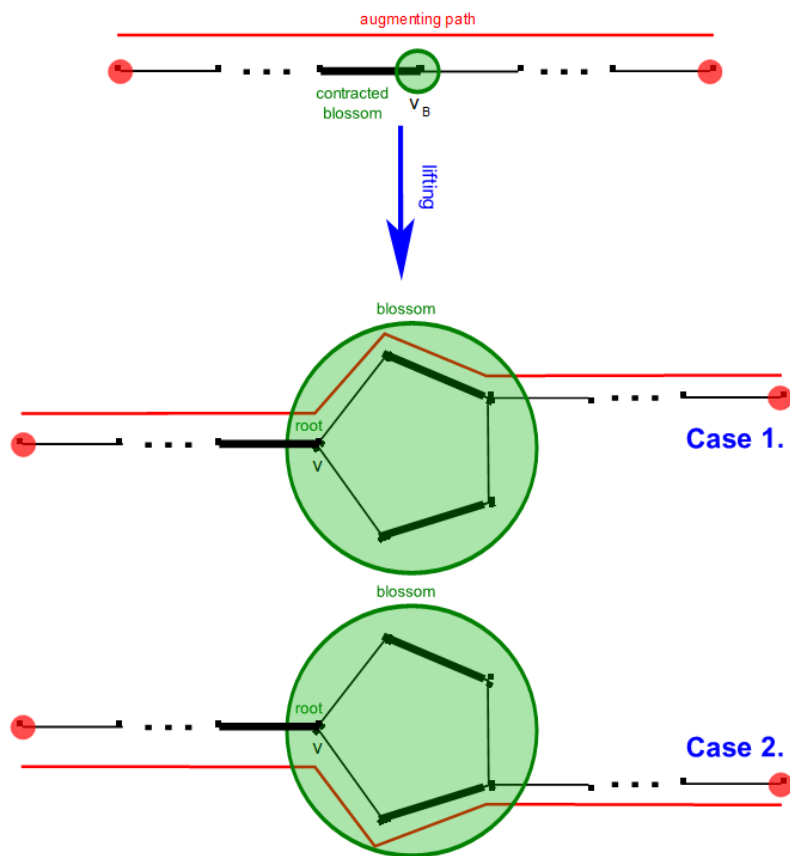
$G'$  含有  $M'$  的增广路当且仅当  $G$  含有  $M$  的增广路，且任何  $M'$  在图  $G'$  的增广路  $P'$  都可以通过展开收缩的花还原  $G$  中的匹配  $M$ 。因此如果存在任意一条增广路  $P'$  通过收缩的花  $V_B$  都可以找到合适的增广路通过花  $B$ 。因此我们可以将一朵花缩成一个点。



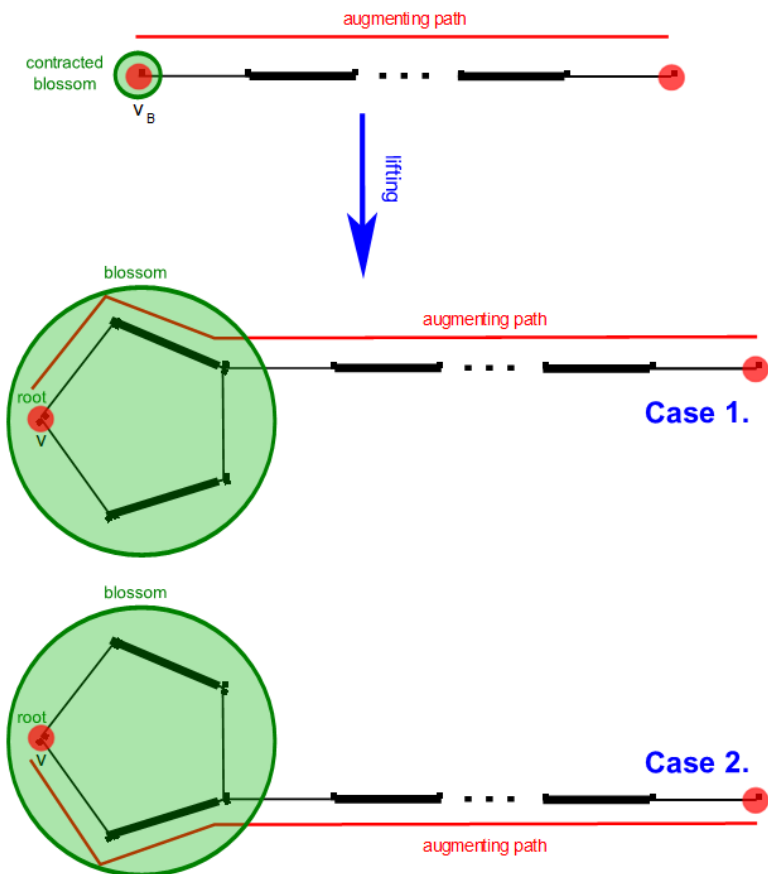
### 收缩的正确性证明

如以下几图所示，如果  $P'$  在图  $G'$  中经过  $u \rightarrow V_B \rightarrow w$ ，这条增广路可以在  $G$  中配替换为  $u \rightarrow (u \rightarrow \dots \rightarrow w) \rightarrow w$ ，其中  $u'$  与  $w'$  在花  $B$  中。路径  $u' \rightarrow w'$  的选择需保证构成的新增广路仍然是交替的。（其中  $u'$  即在花  $B$  中也在匹配  $M$  中

(花根  $w' \rightarrow w$  是一条增广路)



若  $P'$  在  $V_B$  结束，这条增广路可以在  $G$  中被替换为  $u \rightarrow (u \rightarrow \dots \rightarrow v)$  其中  $u'$  与  $v'$  在花  $B$  中。路径  $u' \rightarrow v'$  的选择需保证构成的新增广路仍然是交替的。  
 (其中  $v'$  是孤立的 (花根  $u \rightarrow u'$  是一条增广路))



继续观察可以发现，整个奇环的匹配状态只与顶点的匹配状态有关，如果在后来的某一次寻找时奇环上的匹配被改变了，那么顶点的颜色唯一决定了整个环的匹配边是如何走的。（花上的任意一个点都可作为o型点出边）

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:%E5%B8%A6%E8%8A%B1%E6%A0%91&rev=1590138048>

Last update: 2020/05/22 17:00