

声明：本知识点为帮助大家更好地理解置换群论这一抽象的内容，一些定义中掺杂了撰写者自身的理解，和严格的数学定义有些出入，基本为数学定义的缩小解释和限制解释。

另外，统一一些符号的使用。

对集合 $A$ ， $|A|$ 表示 $A$ 中元素的个数

对命题 $p$ ，若为真，则 $[p]=1$ ，若为假，则 $[p]=0$ ，如 $[1>2]=0$ ， $[\gcd(3,5)=1]=1$

对一个群 $G$ ， $e$ 表示该群的单位元， $g^{-1}$ 表示群中元素 $g$ 的逆元

## 问题描述

一个 $n$ 个点的环，用 $n$ 种颜色去染。求有多少种本质不同的染色方案。

两种染色方案相同当且仅当通过旋转（不包括翻转）后，每个点的颜色都相同。

### Polya定理

## 解决方案

为了让大家看起来有耐心，我先把结论放出来。事实上，本题的答案是 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n^{\gcd(i,n)}$

但是，想要证明这个结果着实要下一点功夫。事实上，要得到这个答案，需要使用Burnside引理。那么Burnside引理在说什么呢？

### Burnside引理内容

这个引理的内容并不是很通俗易懂，需要先给出一些定义才能表述清楚

#### 定义1（置换）

$n$ 元集合 $A$ 到它自身的一个一一映射，称为 $A$ 上的一个 $n$ 元置换或 $n$ 阶置换。简记为 $\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array} \right)$ 其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为1到 $n$ 的排列

意思是，把第 $i_1$ 个点换到1号位置，第 $i_2$ 个点换到2号位置，……，第 $i_n$ 个点换到 $n$ 号位置。

#### 定义2（同种染色置换，同种染色置换群）

我们把对应同一种染色方案的置换称为同种染色置换。全部同种染色置换构成一个集合 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ，本题中 $G$ 包含 $s=n$ 个元素，分别表示顺势针转 $0 \sim n-1$ 次。定义 $G$ 上的二元运算 $*$ ，对 $\forall$   $i, j \in G$ ， $g_i * g_j$ 表示先按 $g_i$ 置换，再按 $g_j$ 置换。可以证明（参考结论1） $(G, *)$ 构成一个群，这称为同种染色置换群。

### 定义3 (朴素染色方案)

即不考虑旋转情况的染色方案。本问题中共 $N=n^n$ 种朴素染色方案。如无特别说明，此后中的染色方案都指朴素染色方案。可以建立一个正整数到染色方案的一一映射，即可以用一个 $1\sim N$ 的正整数表示一种染色方案。

### 定义4 (同种染色置换对朴素染色方案的作用)

对一种同种染色置换 $g\in G$ 和每一种染色方案 $k\in\{1\leq k\leq N\}$ ， $g(k)$ 也是一个 $1\sim N$ 的整数，表示另一种染色方案，即将染色方案 $k$ 按照 $g$ 进行置换。从 $k$ 到 $g(k)$ 的映射称为 $g$ 对 $k$ 的作用。特别注意 $g(k)$ 可能等于 $k$ （如 $k$ 表示将所有点染成红色，则无论怎么旋转，显然染色方案不变），也可能不等于 $k$ （但无论 $g(k)$ 与 $k$ 是否相等 $g(k)$ 与 $k$ 都是本质相同的染色（因为是同种染色置换得到的，在最终答案中只考虑一次））。

介绍了这么多，终于可以阐述Burnside引理的内容了。首先，构造一个函数 $f(g,x)=\sum_{k=1}^N f(g_i,k)$ 这是一个典型的用于计数的函数。设 $c(g_i)=\sum_{k=1}^N f(g_i,k)$ 即满足 $g_i(k)=k$ 的染色方案个数。那么最终答案 $ans=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^s c(g_i)$ 其中 $s=|G|$

## Burnside引理证明

### 结论1

$(G,*)$ 构成一个群。

根据群的定义，满足封闭性，结合律，单位元，逆元四条性质的集合和二元运算构成群（四条性质具体内容不了解的可以百度）。

显然 $G$ 对 $*$ 运算满足封闭性，结合律。单位元 $e$ 即旋转0次对应的置换。除 $e$ 以外，旋转 $i$ 次置换的逆元为旋转 $n-i$ 次置换。

事实上，这是Burnside引理基本的适用范围。也就是说，只有同种染色置换能构成群的问题，才能使用Burnside引理来解决。

### 定义5 (不动点集)

对于任意染色方案 $k\in G$ 中一定存在一些元素满足 $g(k)=k$ （至少 $e$ 一定满足要求，因此“一定”的表述的严谨的）。设所有满足 $g(k)=k$ 的同种染色置换构成 $k$ 的不动点集，用 $Z_k$ 表示。可以证明 $(Z_k,*)$ 构成一个群（结合律，单位元显然，封闭性，逆元也易证）。

### 定义6 (等价类)

对将 $G$ 中的 $s$ 个元素分别作用于 $k$ 得到 $k$ 的等价类，用符号 $E_k$ 表示 $E_k=\{g_1(k),g_2(k),\dots,g_s(k)\}$ 包含全部本质上和 $k$ 相同的朴素染色方案。特别注意 $g_1(k),g_2(k),\dots,g_s(k)$ 中存在一些相同的数，应当剔除重复的结果，得到 $E_k$

我们最终要计算有多少种本质不同的染色方案，其实就是要计算一共有多少个等价类。

## 结论2

对 $1 \sim N$ 中的任何一个数 $k$ 有 $|G| = |E_k| \cdot |Z_k|$

设 $Z_k = \{g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_p}\}$ ,  $E_k = \{g_{j_1}(k), g_{j_2}(k), \dots, g_{j_q}(k)\}$

设 $H = \{g \mid g = g_{i_x} * g_{j_y}, 1 \leq x \leq p, 1 \leq y \leq q\}$  若 $y$ 不相等，则 $g(k) = g_{j_y}(g_{i_x}(k)) = g_{j_y}(k)$ 不相等。若 $y$ 相等且 $x$ 不相等，则 $g * g_{j_y}^{-1} = g_{i_x}$ 不相等。因此有 $H$ 中任意两个元素都不相同 $\square$   $H$ 中共有 $pq$ 个元素。

显然有 $H \subseteq G$  下证 $G \subseteq H$

对 $G$ 中任意元素 $g$ , 有 $g(k) \in E_k$  不妨设 $g(k) = g_{j_1}(k)$  则有 $g_{j_1}^{-1}(g(k)) = k$  即 $g * g_{j_1}^{-1} \in Z_k$  则 $g = (g * g_{j_1}^{-1}) * g_{j_1} \in H$  所以 $G \subseteq H$

因为 $|H| = pq = |E_k| \cdot |Z_k|$  所以 $|G| = |E_k| \cdot |Z_k|$

## 结论3 (Burnside引理)

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:burnside%E5%BC%95%E7%90%86%E5%92%8Cpolya%E5%AE%9A%E7%90%86&rev=1591586679>

Last update: 2020/06/08 11:24