声明：本知识点为帮助大家更好地理解置换群论这一抽象的内容，一些定义中掺杂了撰写者自身的理解，和严格的数学定义有些出入，基本为数学定义的缩小解释和限制解释。

另外，统一一些符号的使用。

对集合A，|A|表示A中元素的个数

对命题p，若为真，则[p]=1，若为假，则[p]=0，如[1>2]=0，[gcd(3,5)=1]=1

对一个群，e表示该群的单位元，g^{-1}表示群中元素g的逆元

问题描述

一个n个点的环，用n种颜色去染。求有多少种本质不同的染色方案。

两种染色方案相同当且仅当通过旋转（不包括翻转）后，每个点的颜色都相同。

Polya定理

解决方案

为了让大家看起来有耐心，我先把结论放出来。事实上，本题的答案是$\frac 1n \sum^n_{i=1} n^{gcd(i,n)}$

但是，想要证明这个结果着实要下一点功夫。事实上，要得到这个答案，需要使用Burnside引理。那么，Burnside引理在说什么呢？

Burnside引理内容

这个引理的内容并不是很通俗易懂，需要先给出一些定义才能表述清楚

定义1（置换）

n元集合A到它自身的一个一一映射，称为A上的一个n元置换或n阶置换。简记为 $$ \mathbf{\sigma} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\\ \end{array} \right) $$ 其中，$i_1,i_2,\ldots ,i_n$为1到n的排列

意思是，把第i_1个点换到1号位置，第i_2个点换到2号位置，……，第i_n个点换到n号位置。

定义2（同种染色置换，同种染色置换群）

我们把对应同一种染色方案的置换称为同种染色置换。全部同种染色置换构成一个集合$G=\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$，本题中，G包含s=n个元素，分别表示顺势针转0~n-1次。定义G上的二元运算*，对$\forall i,j$，g_i*g_j表示先按g_i置换，再按g_j置换。可以证明（参考结论1），$(G,*)$构成一个群，这称为同种染色置换群。

定义3（朴素染色方案）

即不考虑旋转情况的染色方案。本问题中共$N=n^n$种朴素染色方案。如无特别说明，此后中的染色方案都指朴素染色方案。可以建立一个正整数到染色方案的一一映射，即可以用一个1~N的正整数表示一种染色方案。

定义4（同种染色置换对朴素染色方案的作用）

对一种同种染色置换$g□g\in G□$和每一种染色方案k□$1\le k\le N$□□g(k)也是一个1~N的整数,表示另一种染色方案，即将染色方案k按照g进行置换。从k到g(k)的映射称为g对k的作用。特别注意□g(k)可能等于k□如k表示将所有点染成红色，则无论怎么旋转，显然染色方案不变），也可能不等于k□但无论g(k)与k是否相等□g(k)与k都是本质相同的染色（因为是同种染色置换得到的，在最终答案中只考虑一次）。

介绍了这么多，终于可以阐述Burnside引理的内容了。首先，构造一个函数$\forall g\in G□x\in \{1,2,\ldots,N\}□f(g,x)=[g(x)=x]$□这是一个典型的用于计数的函数。设$c(g_i)=\sum^N_{k=1}f(g_i,k)$□即满足$g_i(k)=k$的染色方案个数。那么最终答案$ans=\frac 1s\sum^s_{i=1}c(g_i)$□其中$s=|G|$

Burnside引理证明

结论1

(G,*)构成一个群。

根据群的定义，满足封闭性，结合律，单位元，逆元四条性质的集合和二元运算构成群（四条性质具体内容不了解的可以百度）。

显然□G对*运算满足封闭性，结合律。单位元e即旋转0次对应的置换。除e以外，旋转i次置换的逆元为旋转n-i次置换。

事实上，这是Burnside引理基本的适用范围。也就是说，只有同种染色置换能构成群的问题，才能使用Burnside引理来解决。

定义5（不动点集）

对于任意染色方案k□G中一定存在一些元素满足g(k)=k□至少e一定满足要求，因此“一定”的表述的严谨的）。设所有满足g(k)=k的同种染色置换构成k的不动点集，用Z_k表示。可以证明□$(Z_k,*)$构成一个群（结合律，单位元显然，封闭性，逆元也易证）。

定义6（等价类）

对将G中的s个元素分别作用于k□得到k的等价类，用符号E_k表示□$E_k=\{g_1(k),g_2(k),\ldots,g_s(k)\}$包含全部本质上和k相同的朴素染色方案。特别注意□$g_1(k),g_2(k),\ldots,g_s(k)$中存在一些相同的数，应当剔除重复的结果，得到$E_k$□

设$E=\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}$□显然有$E=E_{k_1}=E_{k_2}=\ldots=E_{k_m}$

我们最终要计算有多少种本质不同的染色方案，其实就是要计算一共有多少个等价类。

结论2

对1~N中的任何一个数k□有$|G|=|E_k|\cdot |Z_k|$

设$Z_k=\{g_{i_1},g_{i_2},\ldots,g_{i_p}\},E_k=\{g_{j_1}(k),g_{j_2}(k),\ldots,g_{j_q}(k)\}$

设$H=\{g|g=g_{i_x}*g_{j_y},1\le x \le p,1\le y \le q\}$□若y不相等，则$g(k)=g_{j_y}(g_{i_x}(k))=g_{j_y}(k)$不相等。若y相等且x不相等，则$g*g_{j_y}^{-1}=g_{i_x}$不相等。因此有H中任意两个元素都不相同□H中共有$pq$个元素。

显然有$H\subseteq G$□下证$G\subseteq H$□

对G中任意元素g,有$g(k)\in E_k$□设$g(k)=g_{j_y}(k)$□则有$g_{j_y}^{-1}(g(k))=k$□即$g*g_{j_y}^{-1}\in Z_k$□则有$g_{i_x}=g*g_{j_y}^{-1}$□$g=g_{i_x}*g_{j_y}\in H$□所以$G\subseteq H$□

所以有$G=H$□

因为$|H|=pq=|E_k|\cdot |Z_k|$□所以$|G|=|E_k|\cdot |Z_k|$

这个结论证明了，对一个等价类$E=\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}$□有$\sum^m_{i=1}|Z_{k_i}|=|G|$

结论3□Burnside引理）

$f(g,x)$和$c(g_i)$的定义见Burnside引理。接下来将开启一波愉快的推式子。

$\sum^s_{i=1}c(g_i)=\sum^s_{i=1}\sum^N_{x=1}f(g_i,x)=\sum^N_{x=1}\sum^s_{i=1}f(g_i,x)=\sum^N_{x=1}|Z_x|$

这道题求的答案ans是等价类个数。

由结论2□$\sum^N_{x=1}|Z_x|=ans\cdot |G|$□所以$ans=\frac 1s\sum^s_{i=1}c(g_i)$□其中$s=|G|$