

声明：本知识点为帮助大家更好地理解置换群论这一抽象的内容，一些定义中掺杂了撰写者自身的理解，和严格的数学定义有些出入，基本为数学定义的缩小解释和限制解释。

另外，统一一些符号的使用。

对集合A $|A|$ 表示A中元素的个数

对命题p \square 若为真，则 $[p]=1$ \square 若为假，则 $[p]=0$ \square 如 $[1>2]=0$ \square $[\gcd(3,5)=1]=1$

对一个群 \square e表示该群的单位元 $\$g^{-1}$ 表示群中元素 g 的逆元

问题描述

一个n个点的环，用n种颜色去染。求有多少种本质不同的染色方案。

两种染色方案相同当且仅当通过旋转（不包括翻转）后，每个点的颜色都相同。

[Polya定理](#)

解决方案

为了让大家看起来有耐心，我先把结论放出来。事实上，本题的答案是 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gcd(i,n)}$

但是，想要证明这个结果着实要下一点功夫。事实上，要得到这个答案，需要使用Burnside引理。那么Burnside引理在说什么呢？

Burnside引理内容

这个引理的内容并不是很通俗易懂，需要先给出一些定义才能表述清楚

定义1（置换）

n元集合A到它自身的一个一一映射，称为A上的一个n元置换或n阶置换。简记为 $\sigma = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array} \right)$ 其中 i_1, i_2, \dots, i_n 为1到n的排列

意思是，把第 i_1 个点换到1号位置，第 i_2 个点换到2号位置，……，第 i_n 个点换到n号位置。这个记录方法被称为“两行法”（我自己命名的）。因为第一行通常为按顺序的1-n所以经常省略第一行，用 (i_1, i_2, \dots, i_n) 表示一个n元置换。这个表示方法被称为“一行法”。

定义2（同种染色置换，同种染色置换群）

我们把对应同一种染色方案的置换称为同种染色置换。全部同种染色置换构成一个集合 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 。本题中G包含s=n个元素，分别表示顺势针转0~n-1次。定义G上的二元运算*，对 $\forall i, j \in G$ 表示先按 g_i 置换，再按 g_j 置换。可以证明（参考结论1） $(G, *)$ 构成一个群，这称为同种染色置换群。

定义3 (朴素染色方案)

即不考虑旋转情况的染色方案。本问题中共 $N=n^n$ 种朴素染色方案。如无特别说明，此后中的染色方案都指朴素染色方案。可以建立一个正整数到染色方案的一一映射，即可以用一个 $1 \sim N$ 的正整数表示一种染色方案。

定义4 (同种染色置换对朴素染色方案的作用)

对一种同种染色置换 $g \in G$ 和每一种染色方案 $k \in \{1 \leq k \leq N\}$ ， $g(k)$ 也是一个 $1 \sim N$ 的整数，表示另一种染色方案，即将染色方案 k 按照 g 进行置换。从 k 到 $g(k)$ 的映射称为 g 对 k 的作用。特别注意 $g(k)$ 可能等于 k （如 k 表示将所有点染成红色，则无论怎么旋转，显然染色方案不变），也可能不等于 k 但无论 $g(k)$ 与 k 是否相等， $g(k)$ 与 k 都是本质相同的染色（因为是同种染色置换得到的，在最终答案中只考虑一次）。

介绍了这么多，终于可以阐述Burnside引理的内容了。首先，构造一个函数 $\forall g \in G \forall x \in \{1, 2, \dots, N\} f(g, x) = [g(x) = x]$ 。这是一个典型的用于计数的函数。设 $h(g_i) = \sum_{k=1}^N f(g_i, k)$ ，即满足 $g_i(k) = k$ 的染色方案个数。那么最终答案 $ans = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s h(g_i)$ ，其中 $s = |G|$ 。

Burnside引理证明

结论1

$(G, *)$ 构成一个群。

根据群的定义，满足封闭性，结合律，单位元，逆元四条性质的集合和二元运算构成群（四条性质具体内容不了解的可以百度）。

显然 G 对 $*$ 运算满足封闭性，结合律。单位元 e 即旋转0次对应的置换。除 e 以外，旋转 i 次置换的逆元为旋转 $n-i$ 次置换。

事实上，这是Burnside引理基本的适用范围。也就是说，只有同种染色置换能构成群的问题，才能使用Burnside引理来解决。

定义5 (不动点集)

对于任意染色方案 $k \in G$ 中一定存在一些元素满足 $g(k) = k$ ，至少 e 一定满足要求，因此“一定”的表述的严谨的）。设所有满足 $g(k) = k$ 的同种染色置换构成 k 的不动点集，用 Z_k 表示。可以证明 $(Z_k, *)$ 构成一个群（结合律，单位元显然，封闭性，逆元也易证）。

定义6 (等价类)

对将 G 中的 s 个元素分别作用于 k 得到 k 的等价类，用符号 E_k 表示。 $E_k = \{g_1(k), g_2(k), \dots, g_s(k)\}$ 包含全部本质上和 k 相同的朴素染色方案。特别注意 E_k 中存在一些相同的数，应当剔除重复的结果，得到 E_k 。

设 $E = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ 。显然有 $E = E_{k_1} = E_{k_2} = \dots = E_{k_m}$ 。

我们最终要计算有多少种本质不同的染色方案，其实就是要计算一共有多少个等价类。

结论2

对 $1 \sim N$ 中的任何一个数 k 有 $|G| = |E_k| \cdot |Z_k|$

设 $Z_k = \{g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_p}\}$, $E_k = \{g_{j_1}(k), g_{j_2}(k), \dots, g_{j_q}(k)\}$

设 $H = \{g | g = g_{i_x} * g_{j_y}, 1 \leq x \leq p, 1 \leq y \leq q\}$ 若 y 不相等，

则 $g(k) = g_{j_y}(g_{i_x}(k)) = g_{j_y}(k)$ 不相等。若 y 相等且 x 不相等，则 $g * g_{j_y}^{-1} = g_{i_x}$ 不相等。因此有 H 中任意两个元素都不相同 H 中共有 pq 个元素。

显然有 $H \subseteq G$ 下证 $G \subseteq H$

对 G 中任意元素 g , 有 $g(k) \in E_k$ 设 $g(k) = g_{j_y}(k)$ 则有 $g_{j_y}^{-1}(g(k)) = k$
即 $g * g_{j_y}^{-1} \in Z_k$ 则有 $g_{i_x} = g * g_{j_y}^{-1}$ 所以 $g = g_{i_x} * g_{j_y} \in H$ 所以 $G \subseteq H$

所以有 $G = H$

因为 $|H| = pq = |E_k| \cdot |Z_k|$ 所以 $|G| = |E_k| \cdot |Z_k|$

这个结论证明了，对一个等价类 $E = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ 有 $\sum_{i=1}^m |Z_{k_i}| = |G|$

结论3(Burnside引理)

$f(g, x)$ 和 $h(g_i)$ 的定义见Burnside引理。接下来将开启一波愉快的推式子。

$\sum_{i=1}^s h(g_i) = \sum_{i=1}^s \sum_{x=1}^N f(g_i, x) = \sum_{x=1}^N \sum_{i=1}^s f(g_i, x) = \sum_{x=1}^N |Z_x|$

这道题求的答案 ans 是等价类个数。

由结论2 $\sum_{x=1}^N |Z_x| = ans \cdot |G|$ 所以 $ans = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s h(g_i)$ 其中 $s = |G|$

问题最终解决

希望大家没有忘记原先的问题。如果忘了，可以回到最上面看一下。

在这个问题当中，我们最重要的就是求出 $c(g_i)$ 我们不妨先从简单的情况想起。我们设 g_i 表示顺势针转 i 次的置换。显然有 $c(g_0) = N = n^n$ 也就是说，对 $\forall k, g_0(k) = k$

同样的，显然有 $c(g_1) = n$ 只有所有点颜色都相同的朴素染色方案，才有顺势针旋转1次后，结果不变。

对于旋转 i 次，要求第1个点，第 $1+i$ 个点，第 $1+2i$ 个点,...,第 $ki \% n + 1$ 个点颜色必须相同。所有形如 $(ki+1) \% n + 1$ 的点颜色必须相同；形如 $(ki+2) \% n + 1$ 的点必须相同.....由裴蜀定理一共有 $\gcd(n, i)$ 组点，每组点的颜色必须相同。因此 $c(g_i) = n^{\gcd(n, i)}$

所以，这个问题的答案 $ans = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n^{\gcd(n, i)}$

Burnside引理升级版——Polya定理

所谓升级版，其实是Burnside引理的简化版。学习Polya定理之前要先了解另一种置换的表示法。

“循环法”表示

对于一个置换，除了用“两行法”，“一行法”表示，还有一种“循环法”。比如一个置换 $(5,1,2,3,4)$ ，表示 $5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ 即5换到1的位置、1换到2的位置、2换到3的位置、3换到4的位置、4换到5的位置，5个元素构成了一个循环。再比如 $(5,3,2,1,4)$ ，表示 $5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ 这两个循环。因此， $(5,3,2,1,4)$ 可以记作 $(5,1,4)(3,2)$ ，这种表示置换的方法被称为循环法。 $(5,1,2,3,4)$ 用“循环法”表示仍是 $(5,1,2,3,4)$ 。

值得注意的是，仅改变括号顺序，并不改变置换。如 $(1,2)(3,4)(5)$ 和 $(3,4)(5)(1,2)$ 均表示 $(2,1,4,3,5)$ 。每个括号内数字的轮换也不改变置换，如“循环法”表示的 $(5,1,2,3,4)$ ， $(2,3,4,5,1)$ ， $(1,2,3,4,5)$ 均表示“一行法”下的 $(5,1,2,3,4)$ 。但交换一个括号内的两个数，可能会改变置换。如 $(5,1,4)(3,2)$ 表示 $(5,3,2,1,4)$ ，而 $(1,5,4)(3,2)$ 表示 $(4,3,2,5,1)$ 。

定义（循环数）

用循环法表示一个置换使用的括号数，为该置换的循环数。如 $(1,2)(3,4)(5)$ 的循环数为3， $(1,5,4)(3,2)$ 的循环数为2， $(5,1,2,3,4)$ 的循环数为1

对于任意置换 g 设 $c(g)$ 表示其循环数。

可以证明，任何一个置换均可用“循环法”唯一地表示。这里的唯一是指，循环数唯一，且每个循环确定。

结论4

假设所求问题为 n 个点染 m 种颜色。对于任意置换 g_i 有 $h(g_i) = m^{\{c(g_i)\}}$ 其中 $h(g_i)$ 为置换 g_i 的不动点数， $c(g_i)$ 为置换 g_i 的循环数。

对任意染色方案 k ， $g_i(k)=k$ 当且仅当 g_i 的每个循环中所有元素颜色均相同。如 k 满足 $g_i=(1,5,4)(3,2)$ ， $g_i(k)=k$ 当且仅当第1,4,5个点颜色相同，第2,3个点颜色相同。因此有 $h(g_i)=m^{\{c(g_i)\}}$

Polya定理

将结论4带入Burnside引理，得 $\text{ans}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(g_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m^{\{c(g_i)\}}$

