

# 问题概述

回路问题指的是有向或无向图中的欧拉回路和哈密顿回路问题。

## 欧拉回路问题

### 定义

在一个有向或无向图 $G$ 中，所有边都经过一次且仅经过一次的通路称为欧拉通路，若起点与终点相同，则称为欧拉回路。

若一个图有欧拉回路，则称其为欧拉图，否则若其有欧拉通路，称其为半欧拉图。

### 判定

无向图欧拉通路的判定条件十分简单，只要图没有奇数度的节点或有且仅有两个奇数度的节点且图是连通图。并且显然若有两个奇数度的节点，那么这两个点必定分别是欧拉通路的起终点。

若无向连通图没有奇数度的节点，那么它一定有欧拉回路。注意这是欧拉回路判定的充要条件，因为每个点都可以进出达到平衡。

有向图的欧拉通路判定条件略为复杂，首先它的基图（即去掉方向的无向图）要连通，其次和无向图对应，所有点出入度相等或一个点出度比入度多一另一个点出度比入度少一、其它点出入度相等。起终点判断显然。

与无向图类似，有向图的欧拉回路判定条件为，基图连通且所有点出入度相等。这同样是充要条件。

这些判断方法的定理和推论都来自离散数学，不过多赘述其实是我不会。

### 求解

#### 方法一——DFS求解

这一方法非常显然，找到一个正确的起点开始DFS，走不通了就回溯，在栈中记录下经过的边的顺序，当走完所有边时结束算法即可。

```
#include <map>
#include <set>
#include <ctime>
#include <cmath>
#include <stack>
#include <queue>
#include <vector>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
```

```
#include <cstring>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int maxn = 10000 + 5;
const int maxm = 100000 + 5;

int N;//点数
int M;//边数
int in[maxn], out[maxn];//点的出入度
int flag;//是否找到答案
int F[maxn], nxt[maxm << 1], v[maxm << 1], ban[maxm << 1], EID = 0;//邻接表,
注意因为要ban掉反边所以从0开始编号
int st;//起点
int stk[maxm], top = 0;//记录路径

inline void add(int f, int t)
{
    nxt[EID] = F[f];
    v[EID] = t;
    F[f] = EID++;
}

inline void dfs(int x)
{
    stk[++top] = x;
    if(top == M + 1)
    {
        for(int i = 1;i <= top;++i)
            printf("%d ", stk[i]);
        printf("\n");
        flag = true;
        return;
    }
    for(int i = F[x];i != -1;i = nxt[i])
    {
        if(ban[i])
            continue;
        ban[i] = 1;
        ban[i ^ 1] = 1;
        dfs(v[i]);
        ban[i] = 0;
        ban[i ^ 1] = 0;
        if(flag)
            return;
    }

    --top;
}
```

```

int main()
{
    memset(F, -1, sizeof F);
    scanf("%d%d", &N, &M);
    for(int i = 1; i <= M; ++i)
    {
        int u, v;
        scanf("%d%d", &u, &v);
        add(u, v);
        add(v, u);
        ++in[v], ++out[u];
    }

    for(int i = 1; i <= N; ++i) // 找到起点
        if(out[i] & 1)
        {
            st = i;
            break;
        }
    if(st == 0) // 若全都出度等于入度说明有欧拉回路，可以从任意一个点开始
        st = 1;

    dfs(st);

    return 0;
}

```

## 方法二 Fleury 算法

设  $G$  为一无向欧拉图，求  $G$  中的一个欧拉回路。

(1) 首先，任取  $G$  中的一个顶点  $V_0$  令  $P_0 = V_0$

(2) 假设沿  $P_i = V_0 e_1 V_1 e_2 V_2 \dots e_i V_i$  走到顶点  $V_i$  按照下面的方法从集合  $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  中选取  $e_{i+1}$

(a)  $e_{i+1}$  与  $V_i$  相关联

(b) 除非没有边可以选择，否则  $e_{i+1}$  不是  $G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  中的桥。

(3) 当 (2) 不能继续进行时结束算法。

先研究一下边表写法代码看 [这篇博客](#)

## 哈密顿回路问题

# 定义

哈密顿回路指的是一个回路通过图的每个点一次且仅一次，每条边最多一次的回路。

# 判定

## Dirac定理(充分条件)

设一个无向图中有 $N$ 个顶点，若所有顶点的度数大于等于 $\frac{N}{2}$ 则哈密顿回路一定存在( $\frac{N}{2}$ 指的是 $\frac{N}{2}$ 向上取整)。

## 必要条件

设图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图，则对于 $V$ 的任意一个非空子集 $S$ 若以 $|S|$ 表示 $S$ 中元素的数目 $|G-S|$ 表示 $G$ 中删除了 $S$ 中的点以及这些点所关联的边后得到的子图，则 $W(G-S) \leq |S|$ 成立。其中 $W(G-S)$ 是 $G-S$ 中连通分量数。

$N(N \geq 2)$ 阶竞赛图一定有哈密顿回路。（竞赛图是通过在无向完整图中为每个边分配方向而获得的有向图）

# 求解

由Dirac定理为前提构造

(1) 任意找两个相邻的节点 $S$ 和 $T$ 在其基础上扩展出一条尽量长的没有重复结点的的路径。即如果 $S$ 与结点 $v$ 相邻,而且 $v$ 不在路径 $S \rightarrow T$ 上,则可以把该路径变成 $v \rightarrow S \rightarrow T$ 然后 $v$ 成为新的 $S$ 从 $S$ 和 $T$ 分别向两头扩展，直到无法继续扩展为止，即所有与 $S$ 或 $T$ 相邻的节点都在路径 $S \rightarrow T$ 上。

(2) 若 $S$ 与 $T$ 相邻，则路径 $S \rightarrow T$ 形成了一个回路。


(3) 若 $S$ 与 $T$ 不相邻,可以构造出来一个回路。设路径 $S \rightarrow T$ 上有 $k + 2$ 个节点，依次为 $S, v_1, v_2 \dots v_k, T$ 可以证明存在节点 $v_i (i \in [1, k])$ 满足 $v_i$ 与 $T$ 相邻，且 $v_{i+1}$ 与 $S$ 相邻。找到这个节点 $v_i$ 把原路径变成 $S \rightarrow v_i \rightarrow T \rightarrow v_{i+1} \rightarrow S$ 即形成了一个回路。

(4) 到此为止，已经构造出来了一个没有重复节点的回路，如果其长度为 $N$ 则哈密顿回路就找到了。如果回路的长度小于 $N$ 由于整个图是连通的，所以在该回路上，一定存在一点与回路之外的点相邻。那么从该点处把回路断开，就变回了一条路径，同时还可以将与之相邻的点加入路径。再按照步骤1的方法尽量扩展路径，则一定有新的节点被加进来。接着回到步骤(2)。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:

<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:circuit&rev=1589979844> 

Last update: **2020/05/20 21:04**