树的直径及其性质

树$T= \langle E, V \rangle$的直径定义为$max\{ \delta(u,v) \} u,v \in V$□其中$\delta(u,v)$表示点$u$和点$v$之间的简单路径。简单来说，在树上任取两个点可以得到它们之间的距离，而最大的那个距离就是直径。

树的直径有这些性质：

1.两端点一定是叶子节点。

证明：显然，如果有一个端点不是叶子则可以延长到一个叶子使直径边长。

2.距任意点最远点一定是直径的端点。

证明：假设不是，我们从u找到的最远点是v□而直径是从a到b□如果v在$\delta(a,b)$上，那么显然距离u最远的点不是v□还可以继续延长，矛盾。如果v不在$\delta(a,b)$上，那么我们在$\delta(a,b)$上选一个点p□那么有$dis(u,v)>dis(u,p)+dis(p,b)$□因此有$dis(a,v) = dis(a,p) + dis(p,u) + dis(u,v) > dis(a,p) + dis(p,b) = dis(a,b)$□得出$\delta(a,b)$不是直径，矛盾。因此得证。

3.两棵树相连，新直径的两端点一定是原四个端点中的两个，且新直径长度最小为max(max(直径1，直径2)，半径1+半径2+新边长度) (设k为直径中最接近中点的节点，半径=max(tot-d[k],d[k]))□

证明：显然。

4.一棵树上接一个叶子结点，直径最多改变一个端点

证明：显然不可能改变两个端点，也有可能没有改变

树的直径求解

第一种方法是利用性质2，首先从任意一个点开始bfs□找到一个离这个点最远的点，这样就找到了直径的一端，然后我们从这个点再开始bfs就可以同时找出直径的长度和直径的两端。但这种方法的缺点是不能处理有负权的情况。代码实现十分简单，这里就不给出了。

第二种方法是树形DP□令$f_1[i]$表示节点i到它叶子节点路径长度的最大值□$f_2[i]$表示节点i到它叶子节点路径长度的次大值，我们只需要按照正常记录最大值和次大值的方法更新，最后的答案即为$max\{ f_1[i] + f_2[i] \}$□这一方法可以处理负权，但是很难确定直径的两端是哪两个节点。代码实现可以看这篇博客