

# 树的直径及其性质

树  $T = \langle E, V \rangle$  的直径定义为  $\max\{\delta(u, v) \mid u, v \in V\}$  其中  $\delta(u, v)$  表示点  $u$  和点  $v$  之间的简单路径。简单来说，在树上任取两个点可以得到它们之间的距离，而最大的那个距离就是直径。

树的直径有这些性质：

1. 两 endpoint 一定是叶子节点。

证明：显然，如果有一个 endpoint 不是叶子则可以延长到一个叶子使直径边长。

2. 距任意点最远点一定是直径的 endpoint。

证明：假设不是，我们从  $u$  找到的最远点是  $v$  而直径是从  $a$  到  $b$ 。如果  $v$  在  $\delta(a, b)$  上，那么显然距离  $u$  最远的点不是  $v$  还可以继续延长，矛盾。如果  $v$  不在  $\delta(a, b)$  上，那么我们在  $\delta(a, b)$  上选一个点  $p$  那么有  $\text{dis}(u, v) > \text{dis}(u, p) + \text{dis}(p, b)$  因此有  $\text{dis}(a, v) = \text{dis}(a, p) + \text{dis}(p, u) + \text{dis}(u, v) > \text{dis}(a, p) + \text{dis}(p, b) = \text{dis}(a, b)$  得出  $\delta(a, b)$  不是直径，矛盾。因此得证。

3. 两棵树相连，新直径的两 endpoint 一定是原四个 endpoint 中的两个，且新直径长度最小为  $\max(\max(\text{直径}_1, \text{直径}_2), \text{半径}_1 + \text{半径}_2 + \text{新边长度})$  (设  $k$  为直径中最接近中点的节点， $\text{半径} = \max(\text{tot} - d[k], d[k])$ )

证明：显然。

4. 一棵树上接一个叶子节点，直径最多改变一个 endpoint

证明：显然不可能改变两个 endpoint，也有可能没有改变

## 树的直径求解

第一种方法是利用性质2，首先从任意一个点开始 bfs 找到一个离这个点最远的点，这样就找到了直径的一端，然后我们从这个点再开始 bfs 就可以同时找出直径的长度和直径的两端。但这种方法的缺点是不能处理有负权的情况。代码实现十分简单，这里就不给出了。

第二种方法是树形 DP 令  $f_1[i]$  表示节点  $i$  到它叶子节点路径长度的最大值  $f_2[i]$  表示节点  $i$  到它叶子节点路径长度的次大值，我们只需要按照正常记录最大值和次大值的方法更新，最后的答案即为  $\max\{f_1[i] + f_2[i]\}$  这一方法可以处理负权，但是很难确定直径的两端是哪两个节点。代码实现可以看这篇博客

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:diameterandweight&rev=1591848958>

Last update: 2020/06/11 12:15