2025/11/04 15:09 対的直径及其性质

# 树的直径及其性质

树\$T= \langle E, V \rangle\$的直径定义为\$max\{ \delta(u,v) \} u,v \in V\$□其中\$\delta(u,v)\$表示点\$u\$和点\$v\$之间的简单路径。简单来说,在树上任取两个点可以得到它们之间的距离,而最大的那个距离就是直径。

树的直径有这些性质:

1.两端点一定是叶子节点。

证明:显然,如果有一个端点不是叶子则可以延长到一个叶子使直径边长。

2. 距任意点最远点一定是直径的端点。

证明:假设不是,我们从\$u\$找到的最远点是\$v\$\|\mathrm{n}\) 而直径是从\$a\$到\$b\$\|\mathrm{如果\$v\$在\$\delta(a,b)\$上,那么显然距离\$u\$最远的点不是\$v\$\|\mathrm{v}\] 还可以继续延长,矛盾。如果\$v\$不在\$\delta(a,b)\$上,那么我们在\$\delta(a,b)\$上选一个点\$p\$\|\mathrm{m}\]那么有\$dis(u,v)>dis(u,p)+dis(p,b)\$\|\mathrm{m}\]因此有\$dis(a,v) = dis(a,p) + dis(p,u) + dis(u,v) > dis(a,p) + dis(p,b) = dis(a,b)\$\|\frac{1}{2}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\mathrm{m}\|\

3.两棵树相连,新直径的两端点一定是原四个端点中的两个,且新直径长度最小为max(max(直径1,直径2),半径1+半径2+新边长度)(设k为直径中最接近中点的节点,半径=max(tot-d[k],d[k]))[

证明:显然。

4.一棵树上接一个叶子结点,直径最多改变一个端点

证明:显然不可能改变两个端点,也有可能没有改变

## 树的直径求解

第一种方法是利用性质2,首先从任意一个点开始bfs□找到一个离这个点最远的点,这样就找到了直径的一端,然后我们从这个点再开始bfs就可以同时找出直径的长度和直径的两端。但这种方法的缺点是不能处理有负权的情况。代码实现十分简单,这里就不给出了。

第二种方法是树形DP $\square$ 令 $\$f_1[i]$ \$表示节点\$i\$到它叶子节点路径长度的最大值 $\square$ \$ $f_2[i]$ \$表示节点\$i\$到它叶子节点路径长度的次大值,我们只需要按照正常记录最大值和次大值的方法更新,最后的答案即为\$max $\{f_1[i] + f_2[i] \}$  $\square$ 这一方法可以处理负权,但是很难确定直径的两端是哪两个节点。代码实现可以看这篇博客

## 树的直径例题

例题1——POJ1985

#### 题目大意

树的直径裸题,不过题目输入非常规

update: 2020-2021:teams:hotpot:diameterandweight https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:diameterandweight&rev=1591849122 12:18

### 解题思路

没有负权,两种方法皆可

### 代码实现

和上面的连接一样

====例题2——

https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021: teams: hotpot: diameter and weight & rev=15918491221 + teams: hotpot: diameter and weight & rev=1591849121 + teams: hotpot: diameter and weight & rev=159184912 + teams: hotpot: diameter and weight & rev=15918491 + teams:

Last update: 2020/06/11 12:18



Printed on 2025/11/04 15:09 https://wiki.cvbbacm.com/