

树的直径及其性质

树 $T = \langle E, V \rangle$ 的直径定义为 $\max\{\delta(u, v) \mid u, v \in V\}$ 其中 $\delta(u, v)$ 表示点 u 和点 v 之间的简单路径。简单来说，在树上任取两个点可以得到它们之间的距离，而最大的那个距离就是直径。

树的直径有这些性质：

1. 两 endpoint 一定是叶子节点。

证明：显然，如果有一个 endpoint 不是叶子则可以延长到一个叶子使直径边长。

2. 距任意点最远点一定是直径的 endpoint。

证明：假设不是，我们从 u 找到的最远点是 v 而直径是从 a 到 b 。如果 v 在 $\delta(a, b)$ 上，那么显然距离 u 最远的点不是 v 还可以继续延长，矛盾。如果 v 不在 $\delta(a, b)$ 上，那么我们在 $\delta(a, b)$ 上选一个点 p 那么有 $\text{dis}(u, v) > \text{dis}(u, p) + \text{dis}(p, b)$ 因此有 $\text{dis}(a, v) = \text{dis}(a, p) + \text{dis}(p, u) + \text{dis}(u, v) > \text{dis}(a, p) + \text{dis}(p, b) = \text{dis}(a, b)$ 得出 $\delta(a, b)$ 不是直径，矛盾。因此得证。

3. 两棵树相连，新直径的两 endpoint 一定是原四个 endpoint 中的两个，且新直径长度最小为 $\max(\max(\text{直径}_1, \text{直径}_2), \text{半径}_1 + \text{半径}_2 + \text{新边长度})$ (设 k 为直径中最接近中点的节点， $\text{半径} = \max(\text{tot} - d[k], d[k])$)

证明：显然。

4. 一棵树上接一个叶子节点，直径最多改变一个 endpoint

证明：显然不可能改变两个 endpoint，也有可能没有改变

树的直径求解

第一种方法是利用性质 2，首先从任意一个点开始 bfs 找到一个离这个点最远的点，这样就找到了直径的一端，然后我们从这个点再开始 bfs 就可以同时找出直径的长度和直径的两端。但这种方法的缺点是不能处理有负权的情况。代码实现十分简单，这里就不给出了。

第二种方法是树形 DP 令 $f_1[i]$ 表示节点 i 到它叶子节点路径长度的最大值 $f_2[i]$ 表示节点 i 到它叶子节点路径长度的次大值，我们只需要按照正常记录最大值和次大值的方法更新，最后的答案即为 $\max\{f_1[i] + f_2[i]\}$ 这一方法可以处理负权，但是很难确定直径的两端是哪两个节点。代码实现可以看 [这篇博客](#)

树的直径例题

例题 1——POJ1985

题目大意

树的直径裸题，不过题目输入非常规

解题思路


没有负权，两种方法皆可

代码实现

和上面的连接一样

=====例题2——

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:diameterandweight&rev=1591849122> 

Last update: **2020/06/11 12:18**