

树的直径及其性质

树 $T = \langle E, V \rangle$ 的直径定义为 $\max\{\delta(u, v) \mid u, v \in V\}$ 其中 $\delta(u, v)$ 表示点 u 和点 v 之间的简单路径。简单来说，在树上任取两个点可以得到它们之间的距离，而最大的那个距离就是直径。

树的直径有这些性质：

1. 两端点一定是叶子节点。

证明：显然，如果有一个端点不是叶子则可以延长到一个叶子使直径边长。

2. 距任意点最远点一定是直径的端点。

证明：假设不是，我们从 u 找到的最远点是 v 而直径是从 a 到 b 。如果 v 在 $\delta(a, b)$ 上，那么显然距离 u 最远的点不是 v 还可以继续延长，矛盾。如果 v 不在 $\delta(a, b)$ 上，那么我们在 $\delta(a, b)$ 上选一个点 p 那么有 $\text{dis}(u, v) > \text{dis}(u, p) + \text{dis}(p, b)$ 因此有 $\text{dis}(a, v) = \text{dis}(a, p) + \text{dis}(p, u) + \text{dis}(u, v) > \text{dis}(a, p) + \text{dis}(p, b) = \text{dis}(a, b)$ 得出 $\delta(a, b)$ 不是直径，矛盾。因此得证。

3. 两棵树相连，新直径的两端点一定是原四个端点中的两个，且新直径长度最小为 $\max(\max(\text{直径}_1, \text{直径}_2), \text{半径}_1 + \text{半径}_2 + \text{新边长度})$ (设 k 为直径中最接近中点的节点，半径 $= \max(\text{tot} - d[k], d[k])$)

证明：显然。

4. 一棵树上接一个叶子结点，直径最多改变一个端点

证明：显然不可能改变两个端点，也有可能没有改变

树的直径求解

第一种方法是利用性质2，首先从任意一个点开始bfs找到一个离这个点最远的点，这样就找到了直径的一端，然后我们从这个点再开始bfs就可以同时找出直径的长度和直径的两端。但这种方法的缺点是不能处理有负权的情况。代码实现十分简单，这里就不给出了。

第二种方法是树形DP。令 $f_1[i]$ 表示节点 i 到它叶子节点路径长度的最大值， $f_2[i]$ 表示节点 i 到它叶子节点路径长度的次大值，我们只需要按照正常记录最大值和次大值的方法更新，最后的答案即为 $\max\{f_1[i] + f_2[i] \mid i \in V\}$ 。这一方法可以处理负权，但是很难确定直径的两端是哪两个节点。代码实现可以看[这篇博客](#)

树的直径例题

例题1——POJ1985

题目大意

树的直径裸题，不过题目输入非常规

解题思路

没有负权，两种方法皆可

代码实现

和上面的连接一样

例题2——Adjoin the Networks

传送门

题目大意

给出一个森林，求一种链接方式，将森林连成一棵树，并让树的直径最短。边权均为1。

解题思路

应用性质3，由于边权均为1，我们假设两棵树的直径长度分别为 a, b 且 $a \leq b$ ，则：

若 $b \geq a+3$ ，则新树的直径长度仍为 b ，

若 $b = a+2$ ，当 b 为奇数时，新树直径为 $b+1$ ，当 b 为偶数时，直径长度不改变。

若 $b = a+1$ ，新树直径为 $b+1$ □

经过以上分析，采取贪心的思想，我们只需要考虑前三大的直径就能保证直径不再扩大。其它的树相连后直径不会超过前三形成的直径。

代码实现

直接把林佬的代码偷过来

```
#include<algorithm>
#include<stack>
#include<ctime>
#include<cstring>
#include<cmath>
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<cstdio>
#include<queue>
using namespace std;
inline int read(){
```

```
int num=0,f=1;char x=getchar();
while(x<'0' || x>'9'){if(x=='-')f=-1;x=getchar();}
while(x>='0' && x<='9'){num=num*10+x-'0';x=getchar();}
return num*f;
}
const int maxn=10005;
vector<int> e[maxn];
int n,m;
int vst[maxn],dis[maxn];
queue<int> Q;
int solve(int s){
    vst[s]=0;Q.push(s);
    int t=s,tmp=0;
    while(Q.size()){
        int x=Q.front();Q.pop();
        for(auto y:e[x]){
            if(vst[x]+1>vst[y]){
                vst[y]=vst[x]+1;
                Q.push(y);
                if(vst[y]>tmp)tmp=vst[y],t=y;
            }
        }
    }
    dis[t]=0;Q.push(t);tmp=0;
    while(Q.size()){
        int x=Q.front();Q.pop();
        for(auto y:e[x]){
            if(dis[x]+1>dis[y]){
                dis[y]=dis[x]+1;
                Q.push(y);
                tmp=max(tmp,dis[y]);
            }
        }
    }
    printf("%d\n", tmp);
    return tmp;
}
int ans=0;
void get_ans(int x){
    if(ans != 0)
        ans=max(ans, (ans+1)/2+(x+1)/2+1);
    ans=max(ans,x);
}
int main(){
    n=read();m=read();
    for(int i=1,x,y;i<=m;++i){
        x=read()+1;y=read()+1;
        e[x].push_back(y);
        e[y].push_back(x);
    }
    for(int i=1;i<=n;++i)vst[i]=dis[i]=-1;
```

```
for(int i=1,t;i<=n;++i){  
    if(vst[i] == -1)  
    {  
        t=solve(i);  
        get_ans(t);  
    }  
}  
printf("%d\n",ans);  
return 0;  
}
```

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:diameterandweight&rev=1591849567>

Last update: 2020/06/11 12:26

