

树套树

线段树套线段树

虽然称为线段树套线段树，其实大多是通过树状数组套主席树来实现的(没错就是[带修主席树](<http://hotpot.clatisus.com/LOTK%ef%bc%88lxh%ef%bc%89/>主席树))，用以实现查询k在区间内的排名，查询区间内排名为k的数，修改某一位的值，查询某一位的前驱后继等。

线段树套平衡树

如果说，要解决区间上的问题，如最大值，区间修改等，我们选择的显然是线段树。

但是线段树不能查询第k大，不能查询一个数在区间的排名，自然也不能查询前驱和后继，这些只能交给平衡树来解决。

而涉及到区间翻转时，显然也是平衡树的范畴，这种时候我们就需要将两种树形结合起来解决这类更复杂的问题。

特别是涉及到区间翻转，分析后我们不难发现，在前驱后继k在区间内的排名，排名为k的数的查询等操作，线段树套平衡树并不会比线段树套线段树更优。(查找排名为k的数由于二分甚至会多个 \log)

下面给出一道模板题[洛谷P3380 模板]二逼平衡树(树套树)](<https://www.luogu.com.cn/problem/P3380>)

并没有找到带区间翻转和区间查询的题，读者如果有兴趣可以出一道(

下面给出代码(这个题卡常。。。甚至吃评测机状态，之前90分的代码突然变70分。。。然后A了)

平衡树的代码部分我就不进行讲解，用的是[平衡树](<http://hotpot.clatisus.com/LOTK%ef%bc%88lxh%ef%bc%89/>平衡树)的板子

insert/delete

插入操作并没有什么难度，就是在插入的这个点的这条链上的平衡树都插入这个点，删除同理

```
void insert(int x,int p,int w){
    ins(tr[x].root,w);
    if(tr[x].l==tr[x].r)return;
    int mid=(tr[x].l+tr[x].r)>>1;
    if(p<=mid)insert(x<<1,p,w);
    else insert(x<<1|1,p,w);
}
void Delete(int x,int p,int w){
    del(tr[x].root,w);
    if(tr[x].l==tr[x].r)return;
    int mid=(tr[x].l+tr[x].r)>>1;
    if(p<=mid>Delete(x<<1,p,w);
    else Delete(x<<1|1,p,w);
}
```

query

关键的一步操作，我们将所要用的平衡树的根放在一个vector里方便使用

```
vector<int> vec;
void query(int x,int l,int r){
    if(tr[x].l>r||tr[x].r<l)return;
    if(l<=tr[x].l&&tr[x].r<=r){vec.push_back(tr[x].root);return;}
    query(x<<1,l,r);
    query(x<<1|1,l,r);
}
```

pre/suc

对于求前驱后继，我们就在每棵平衡树中求然后取最大最小即可。

```
int Pre(int k){
    int ans=-INF;
    for(auto x:vec)ans=max(ans,pre(k,x));
    vec.clear();
    return ans;
}
int Suc(int k){
    int ans=INF;
    for(auto x:vec)ans=min(ans,suc(k,x));
    vec.clear();
    return ans;
}
```

rank

每棵平衡树求rank相加

```
int Rank(int k){
    int ans=0;
    for(auto x:vec)ans+=get_rank(k,x);
    vec.clear();
    return ans;
}
```

kth

这步操作比较复杂，也是复杂度最大的部分，因为我们并没有直接得到k大的方法，于是只能进行二分，然后用Rank来确定其排名，确定排名我们还需得到排名的上下界，否则易错判。

更重要的一点，要对一开始可能输入的值排序处理方便二分，不然二分增加的这个 \log 偏大导致超时

```
int calc1(int k){
    int ans=0;
    for(auto x:vec)ans+=get_rank(k,x);
    return ans;
}
int calc2(int k){
    int ans=0;
    for(auto x:vec)ans+=get_rank2(k,x);
    return ans;
}
int b[maxn],bcnt;
int get_kth(int k){
    int L=1,R=bcnt;
    while(L<=R){
        int mid=(L+R)>>1;
        int l=calc1(b[mid])+1,r=calc2(b[mid]);
        if(l<=k&&k<=r){vec.clear();return b[mid];}
        if(l>k)R=mid-1;
        if(r<k)L=mid+1;
    }
}
```

完整代码

```
#include<algorithm>
#include<stack>
#include<ctime>
#include<cstring>
#include<cmath>
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<cstdio>
#include<queue>
using namespace std;
inline int read(){
    int x=0,f=1;char ch=getchar();
    while(!isdigit(ch)){if(ch=='-')f=-1;ch=getchar();}
    while(isdigit(ch)){x=x*10+ch-'0';ch=getchar();}
    return x*f;
}
void write(int x){
    if(x<0){putchar('-');write(-x);}
    else {
        if(x/10)write(x/10);
        putchar(x%10+'0');
    }
}
#define ull unsigned long long
```

```
const int maxn=2000005;
ull hval[maxn];
int cnt;
ull Rand(){
    static ull r=1;
    return (r*=998244353)%2147483647;
}
int num[maxn],sum[maxn],son[maxn][2],val[maxn];
int newnode(int x){
    ++cnt;num[cnt]=sum[cnt]=1;
    val[cnt]=x;hval[cnt]=Rand();
    return cnt;
}
void pushup(int x){
    sum[x]=sum[son[x][0]]+sum[son[x][1]]+num[x];
}
void Rot(int &p,int k){
    int x=son[p][k];
    son[p][k]=son[x][k^1];
    son[x][k^1]=p;
    pushup(p);pushup(x);
    p=x;
}
void ins(int &p,int x){
    if(!p){p=newnode(x);return;}
    ++sum[p];
    if(val[p]==x){++num[p];return;}
    ins(son[p][x>val[p]],x);
    if(hval[p]>hval[son[p][x>val[p]]])Rot(p,x>val[p]);
}
void del(int &p,int x){
    --sum[p];
    if(val[p]==x){
        if(num[p]>1)--num[p];
        else if(!son[p][0]||!son[p][1])p=son[p][0]+son[p][1];
        else {Rot(p,hval[son[p][0]]>hval[son[p][1]]);del(p,x);}
    }
    else del(son[p][x>val[p]],x);
}
int get_rank(int x,int root){
    int p=root,ans=0;
    while(p){
        if(val[p]==x){return ans+sum[son[p][0]];}
        else if(x>val[p]){ans+=sum[son[p][0]]+num[p];p=son[p][1];}
        else p=son[p][0];
    }
    return ans;
}
int get_rank2(int x,int root){
    int p=root,ans=0;
```

```

    while(p){
        if(val[p]==x){return ans+sum[son[p][0]]+num[p];}
        else if(x>val[p]){ans+=sum[son[p][0]]+num[p];p=son[p][1];}
        else p=son[p][0];
    }
    return ans;
}
const int INF=2147483647;
int pre(int x,int root){
    int p=root,ans=-INF;
    while(p){
        if(val[p]>=x)p=son[p][0];
        else {ans=val[p];p=son[p][1];}
    }
    return ans;
}
int suc(int x,int root){
    int p=root,ans=INF;
    while(p){
        if(val[p]<=x)p=son[p][1];
        else {ans=val[p];p=son[p][0];}
    }
    return ans;
}
struct tree{
    int l,r,root;
} tr[maxn];
int n,m,w[maxn];
void build(int x,int l,int r){
    tr[x].l=l;tr[x].r=r;
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)>>1;
    build(x<<1,l,mid);
    build(x<<1|1,mid+1,r);
}
void insert(int x,int p,int w){
    ins(tr[x].root,w);
    if(tr[x].l==tr[x].r)return;
    int mid=(tr[x].l+tr[x].r)>>1;
    if(p<=mid)insert(x<<1,p,w);
    else insert(x<<1|1,p,w);
}
vector<int> vec;
void query(int x,int l,int r){
    if(tr[x].l>r||tr[x].r<l)return;
    if(l<=tr[x].l&&tr[x].r<=r){vec.push_back(tr[x].root);return;}
    query(x<<1,l,r);
    query(x<<1|1,l,r);
}
int Rank(int k){
    int ans=0;

```

```
    for(auto x:vec)ans+=get_rank(k,x);
    vec.clear();
    return ans;
}
int calc1(int k){
    int ans=0;
    for(auto x:vec)ans+=get_rank(k,x);
    return ans;
}
int calc2(int k){
    int ans=0;
    for(auto x:vec)ans+=get_rank2(k,x);
    return ans;
}
int b[maxn],bcnt;
int get_kth(int k){
    int L=1,R=bcnt;
    while(L<=R){
        int mid=(L+R)>>1;
        int l=calc1(b[mid])+1,r=calc2(b[mid]);
        if(l<=k&&k<=r){vec.clear();return b[mid];}
        if(l>k)R=mid-1;
        if(r<k)L=mid+1;
    }
}
void Delete(int x,int p,int w){
    del(tr[x].root,w);
    if(tr[x].l==tr[x].r)return;
    int mid=(tr[x].l+tr[x].r)>>1;
    if(p<=mid)Delete(x<<1,p,w);
    else Delete(x<<1|1,p,w);
}
int Pre(int k){
    int ans=-INF;
    for(auto x:vec)ans=max(ans,pre(k,x));
    vec.clear();
    return ans;
}
int Suc(int k){
    int ans=INF;
    for(auto x:vec)ans=min(ans,suc(k,x));
    vec.clear();
    return ans;
}
struct Query{
    int opt,l,r,k;
}q[maxn];
int main(){
    n=read();m=read();
    build(1,1,n);
```

```

for(int i=1;i<=n;++i){
    w[i]=read();
    insert(1,i,w[i]);
    b[++bcnt]=w[i];
}
for(int i=1;i<=m;++i){
    q[i].opt=read();
    q[i].l=read();q[i].r=read();
    if(q[i].opt!=3)q[i].k=read();
    else b[++bcnt]=q[i].r;
}
sort(b+1,b+bcnt+1);
for(int i=1,opt,l,r,k;i<=m;++i){
    opt=q[i].opt;l=q[i].l;r=q[i].r;
    if(opt!=3)k=q[i].k;
    if(opt==1){query(1,l,r);write(Rank(k)+1);putchar('\n');}
    if(opt==2){query(1,l,r);write(get_kth(k));putchar('\n');}
    if(opt==3){Delete(1,l,w[l]);w[l]=r;insert(1,l,w[l]);}
    if(opt==4){query(1,l,r);write(Pre(k));putchar('\n');}
    if(opt==5){query(1,l,r);write(Suc(k));putchar('\n');}
}
return 0;
}

```

平衡树套线段树(替罪羊)

一开始想到平衡树套线段树会感到很奇怪，毕竟大部分的平衡树树形是会改变的，这样的话在改变的过程中同时维护线段树就很难实现。

~~那么有没有这样一棵树，又能保持平衡，又能不轻易改变树形呢?~~

答案是有，替罪羊树完美保证了树形不轻易改变的性质，在重构的同时我们也重构我们的线段树，这样我们就能实现一种带插入的区间查询结构。能够实现插入删除以及区间k大(小)的查询。

而替罪羊树上的每个点，都保存着它子树的权值线段树，一旦重构，便自底向上进行线段树合并。

这里我们给出一道例题[洛谷P4278 带插入区间K小值](<https://www.luogu.com.cn/problem/P4278>)

这道题由于出题人魔改了数据，这种做法只能得20分，其余点TLE+MLE不过题目来源bzoj好像木了，仅供练习使用吧。

ins

在插入替罪羊的同时我们插入线段树，同时用栈保留祖先关系(至于什么作用我们后面再说)

```

void ins(int x,int val){
    int p=root;
    while(p){
        insert(rt[p],val,0,70000,1);
        if(sum[son[p][0]]>=x){

```

```
        sta[++top]=p;sn[top]=0;
        p=son[p][0];
    }
    else {
        x-=sum[son[p][0]]+1;
        sta[++top]=p;sn[top]=1;
        p=son[p][1];
    }
}
p=newnode();w[p]=val;
insert(rt[p],w[p],0,70000,1);
son[sta[top]][sn[top]]=p;
for(int i=top;i>=1;--i)pushup(sta[i]);
}
```

build

这里也是替罪羊的rebuild部分，我们将重建的树所包含的点存好之后，对其重建并通过线段树合并整合信息。

```
void build(int &x,int l,int r){
    if(l>r){x=0;return;}
    if(l==r){
        x=s[l];
        insert(rt[x],w[x],0,70000,1);
        return;
    }
    int mid=(l+r)>>1;x=s[mid];
    build(son[x][0],l,mid-1);
    build(son[x][1],mid+1,r);
    pushup(x);
    Merge(rt[x],rt[son[x][0]],rt[son[x][1]],0,70000);
    insert(rt[x],w[x],0,70000,1);
}
```

merge

线段树合并

```
void Merge(int &x,int son0,int son1,int l,int r){
    if(!x)x=newtr();
    sum(x)=sum(son0)+sum(son1);
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)>>1;
    if(sum(ls(son0))|sum(ls(son1)))Merge(ls(x),ls(son0),ls(son1),l,mid);
    if(sum(rs(son0))|sum(rs(son1)))Merge(rs(x),rs(son0),rs(son1),mid+1,r);
}
```

del

在对树拍扁重建时对线段树上的点回收，否则消耗空间过于巨大

```
void del(int &x){
    if(!x)return;
    del(ls(x));del(rs(x));
    Q.push(x);x=0;
}
```

其余操作没什么好说的，基本就是线段树和替罪羊树的操作，这里根据题涉条件讲两个操作

关于区间提取

在替罪羊树上提取我们所需的点的区间，如果是完全包含，则保存这点的权值线段树，单点包含则保存该点并继续递归子树。

```
void query(int x,int l,int r){
    if(!x)return;
    int L=sum[son[x][0]],R=sum[x];
    if(l==1&&r==R){vectr.push_back(rt[x]);return;}
    if(l<=L+1&&r>=L+1)vecp.push_back(x);
    if(r<=L)query(son[x][0],l,r);
    else if(l>L+1)query(son[x][1],l-L-1,r-L-1);
    else {
        if(l<=L)query(son[x][0],l,L);
        if(R>L+1)query(son[x][1],1,r-L-1);
    }
}
```

关于得到答案

这里我们采取在区间上二分的方式，L,R应时刻保持与区间一致(否则会影响单点的判断)

```
#define unt unsigned int
int solve(int l,int r,int k){
    query(root,l,r);k--;
    int L=0,R=70000;
    unt n=vectr.size();
    while(L<R){
        int mid=(L+R)>>1;
        int tot=0;
        for(auto x:vectr)tot+=sum(ls(x));
        for(auto x:vecp)if(L<=w[x]&&w[x]<=mid)++tot;
        if(tot>k){
            for(unt i=0;i<n;++i)vectr[i]=ls(vectr[i]);
            R=mid;
        }
    }
}
```

```
        else {
            for(unt i=0;i<n;++i)vectr[i]=rs(vectr[i]);
            L=mid+1;k-=tot;
        }
    }
    vecp.clear();vectr.clear();
    return L;
}
```

下面给出~~TLE+MLE~~完整代码

```
#include<algorithm>
#include<stack>
#include<ctime>
#include<cstring>
#include<cmath>
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<cstdio>
#include<queue>
using namespace std;
inline int read(){
    int x=0,f=1;char ch=getchar();
    while(!isdigit(ch)){if(ch=='-')f=-1;ch=getchar();}
    while(isdigit(ch)){x=x*10+ch-'0';ch=getchar();}
    return x*f;
}
void write(int x){
    if(x<0){putchar('-');write(-x);}
    else {
        if(x/10)write(x/10);
        putchar(x%10+'0');
    }
}
const int maxn=20000005;
const int maxm=70005;
int n,root,sum[maxm];
int cnt;
int son[maxm][2];
//线段树
#define ls(x) tr[x].ls
#define rs(x) tr[x].rs
#define sum(x) tr[x].sum
struct tree{
    int sum,ls,rs;
}tr[maxn];
int rt[maxm],cntt;
int w[maxm];
int s[maxm],tp;
queue<int> Q;
```

```

void pushup(int nw){
    sum[nw]=sum[son[nw][0]]+sum[son[nw][1]]+1;
}
int tr_get(){
    if(Q.empty())return ++cntt;
    int t=Q.front();Q.pop();
    return t;
}
int newtr(){
    int t=tr_get();
    ls(t)=rs(t)=sum(t)=0;
    return t;
}
void Merge(int &x,int son0,int son1,int l,int r){
    if(!x)x=newtr();
    sum(x)=sum(son0)+sum(son1);
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)>>1;
    if(sum(ls(son0))|sum(ls(son1)))Merge(ls(x),ls(son0),ls(son1),l,mid);
    if(sum(rs(son0))|sum(rs(son1)))Merge(rs(x),rs(son0),rs(son1),mid+1,r);
}
void insert(int &x,int val,int l,int r,int d){
    if(!x)x=newtr();
    sum(x)+=d;
    if(l==r)return;
    int mid=(l+r)>>1;
    if(val<=mid)insert(ls(x),val,l,mid,d);
    else insert(rs(x),val,mid+1,r,d);
}
void build(int &x,int l,int r){
    if(l>r){x=0;return;}
    if(l==r){
        x=s[l];
        insert(rt[x],w[x],0,70000,1);
        return;
    }
    int mid=(l+r)>>1;x=s[mid];
    build(son[x][0],l,mid-1);
    build(son[x][1],mid+1,r);
    pushup(x);
    Merge(rt[x],rt[son[x][0]],rt[son[x][1]],0,70000);
    insert(rt[x],w[x],0,70000,1);
}
void del(int &x){
    if(!x)return;
    del(ls(x));del(rs(x));
    Q.push(x);x=0;
}
//替罪羊
int newnode(){
    int t=++cnt;

```

```
    sum[t]=1;
    son[t][0]=son[t][1]=0;
    return t;
}
void dfs(int x){
    if(son[x][0])dfs(son[x][0]);
    s[++tp]=x;del(rt[x]);
    if(son[x][1])dfs(son[x][1]);
}
int sta[maxm],top;
bool sn[maxm];
void rebuild(int &nw){tp=0;dfs(nw);build(nw,1,tp);}
void get_reb(int &nw,int p,int d){
    if(nw==p)return;
    if(max(sum[son[nw][0]],sum[son[nw][1]])>sum[nw]*0.75)rebuild(nw);
    else get_reb(son[nw][sn[d]],p,d+1);
}
int kth(int x){
    int p=root;
    while(true){
        if(sum[son[p][0]]>=x)p=son[p][0];
        else if(sum[son[p][0]]+1==x)return p;
        else {x-=sum[son[p][0]]+1;p=son[p][1];}
    }
}
void change(int x,int pv,int nv){
    int p=root;
    while(true){
        insert(rt[p],pv,0,70000,-1);
        insert(rt[p],nv,0,70000,1);
        if(sum[son[p][0]]>=x)p=son[p][0];
        else if(sum[son[p][0]]+1==x){w[p]=nv;return;}
        else {x-=sum[son[p][0]]+1;p=son[p][1];}
    }
}
void ins(int x,int val){
    int p=root;
    while(p){
        insert(rt[p],val,0,70000,1);
        if(sum[son[p][0]]>=x){
            sta[++top]=p;sn[top]=0;
            p=son[p][0];
        }
        else {
            x-=sum[son[p][0]]+1;
            sta[++top]=p;sn[top]=1;
            p=son[p][1];
        }
    }
    p=newnode();w[p]=val;
```

```

    insert(rt[p],w[p],0,70000,1);
    son[sta[top]][sn[top]]=p;
    for(int i=top;i>=1;--i)pushup(sta[i]);
}
vector<int> vectr,vecp;
void query(int x,int l,int r){
    int L=sum[son[x][0]],R=sum[x];
    if(l==1&&r==R){vectr.push_back(rt[x]);return;}
    if(l<=L+1&&r>=L+1)vecp.push_back(x);
    if(r<=L)query(son[x][0],l,r);
    else if(l>L+1)query(son[x][1],l-L-1,r-L-1);
    else {
        if(l<=L)query(son[x][0],l,L);
        if(R>L+1)query(son[x][1],1,r-L-1);
    }
}
#define unt unsigned int
int solve(int l,int r,int k){
    query(root,l,r);k--;
    int L=0,R=70000;
    unt n=vectr.size();
    while(L<R){
        int mid=(L+R)>>1;
        int tot=0;
        for(auto x:vectr)tot+=sum(ls(x));
        for(auto x:vecp)if(L<=w[x]&&w[x]<=mid)++tot;
        if(tot>k){
            for(unt i=0;i<n;++i)vectr[i]=ls(vectr[i]);
            R=mid;
        }
        else {
            for(unt i=0;i<n;++i)vectr[i]=rs(vectr[i]);
            L=mid+1;k-=tot;
        }
    }
    vecp.clear();vectr.clear();
    return L;
}
int main(){
    n=read();
    for(int i=1;i<=n;++i){newnode();w[i]=read();s[i]=i;}
    build(root,1,n);
    int q=read();char s[4];
    int lst=0;
    for(int i=1,x,y,k;i<=q;++i){
        scanf("%s",s);
        x=read()^lst;y=read()^lst;
        if(s[0]=='Q'){k=read()^lst;write(lst=solve(x,y,k));putchar('\n');}
        if(s[0]=='M'){int p=kth(x);change(x,w[p],y);}
        if(s[0]=='I'){ins(x-1,y);get_reb(root,cnt,1);top=0;}
    }
}

```

```
return 0;  
}
```

平衡树套线段树(非旋treap)

根据我们之前的思路，非旋treap的树形也不会轻易改变，因此我们可以采取非旋treap来实现，在split,merge之后用线段树合并来对所需要的信息进行维护

这是一个坑，待填

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:hotpot:lotk_%E6%A0%91%E5%A5%97%E6%A0%91&rev=1588926159 

Last update: 2020/05/08 16:22