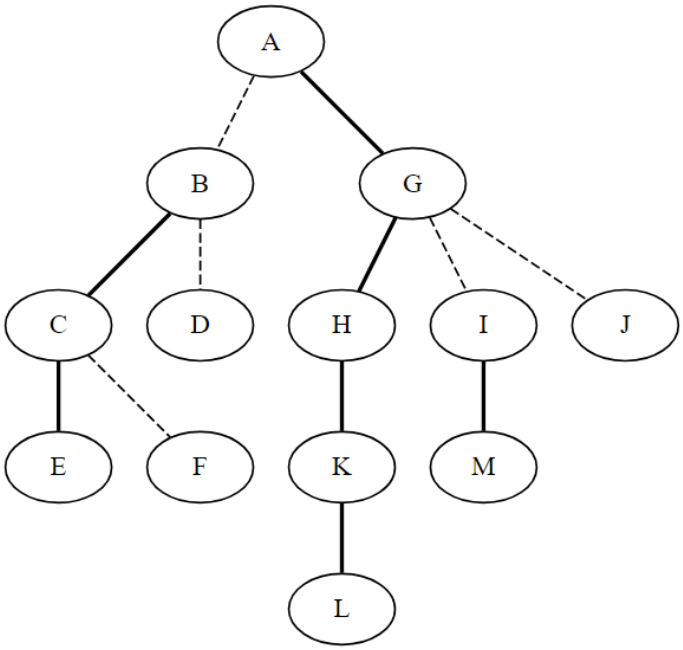
问题概述

~~不知道从什么时候开始~~很多序列问题都可以“ 上树 ”，“ 上树 ”的意思就是在树上进行询问。比如把非常常见的区间求和\最值或者带修改区间求和\最值放到树上，变成树上两个点之间的路径上的权值求和\最值。而树链剖分可以在不错的时间内实现序列问题上树的求解，其具体方式就是把树按照某种方式分成多条链，然后把这些链排成一个一维区间，只要我们能够保证不跨链操作，问题就又变回了序列问题。

重链剖分

首先，我们定义点i的父亲是f_i深度是dep_i子树大小为$size_i$在重链剖分中，我们定义**重边**和**轻边**，对于一个节点i它连向节点个数最大的子树的边是**重边**，其余都是**轻边**多条**重边**连成的链称为重链。比如下图中，实线代表**重边**，虚线代表**轻边**



可以证明，从一个点到根，最多经过$O(\log n)$条轻边。简单证明：首先，从父亲往儿子走，假设从x走到了y如果经过了一条轻边，那么一定有$size_y \le \frac{1}{2} \times size_x$否则这条边一定是重边。那么，我们最多经过$O(\log n)$条轻边就会到达叶子。又因为对于一个点到根的路径，轻链和重链一定是交替存在，所以**重链**的数量一定不会超过**轻边**的数量，所以重链的数量也是$O(\log n)$的，我们只需要记录每个重链上深度最小的点top_i和这条重链起末点的dfs序，然后把这些重链一次放到一个序列里，就可以构成一个在一维序列上查询修改的问题，一般用线段树来维护这个序列。

现在考虑给出树上两个点，如何找到它们之间的路径，首先，如果两个点在同一个重链上，那么我们直接在这条链上操作即可，否则，我们把**链顶深度大**的链上的元素处理完后，从链顶跳到链顶的父亲，从一个重链跳到一个链顶深度更小的重链并重复这一步骤，显然我们最后一定可以把这两个点都跳到它们的LCA所在的重链上，这时我们把剩下的元素进行操作，就完成了对两个点之间路径上的元素的操作。我们都知道线段树的操作复杂度是$O(\log n)$而由我们之前的证明，我们最多操作$O(\log n)$个重链，所以树链剖分一次操作的复杂度是$O(\log^2 n)$

例题——洛谷P2590[ZJOI2008]树的统计

题目大意

给出一棵有点权的树，要求实现单点修改，查询路径权值和以及查询路径最大权值

解题思路

利用树链剖分解决即可，细节可以看代码注释

代码实现

```
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

#define rep(x, y) for(int y = F[x];y;y = Next[y]) //遍历边表的定义

const int maxn = 60100;

int n, X[maxn / 2], deep[maxn / 2], size[maxn / 2], fa[maxn / 2];
int F[maxn], v[maxn], Next[maxn], EID = 1;
int tot = 0, pos[maxn], cc[maxn];
int x, y, ww;
struct Tree{
    int l, r, mx, s;
    Tree()
    {
        mx = -2147483647;
        s = 0;
    }
}node[100005];//线段树节点定义

inline int read()//读入优化
{
    int a = 0;
    bool flag = false;
    char ch;
    while(!((((ch = getchar()) >= '0') && (ch <= '9')) || (ch == '-')));
    if(ch == '-')
        flag = true;
    else
    {
        a = a * 10;
        a += ch - '0';
    }
```

```
    while((((ch = getchar()) >= '0') && (ch <= '9')) || (ch == '-'))
    {
        a = a * 10;
        a += ch - '0';
    }
    if(flag)
        a = -a;
    return a;
}

inline void add(int f, int t)
{
    Next[EID] = F[f];
    v[EID] = t;
    F[f] = EID++;
}

inline void scanff()
{
    n = read();
    for(int i = 1;i <= n - 1;++i)
    {
        x = read(), y = read();
        add(x, y);
        add(y, x);
    }
    for(int i = 1;i <= n;++i)
        X[i] = read();
}

inline void dfs(int x)//处理出一个点所有儿子的大小以及点的深度
{
    size[x] = 1;
    rep(x, i)
    {
        if(v[i] == fa[x])
            continue;
        deep[v[i]] = deep[x] + 1;
        fa[v[i]] = x;
        dfs(v[i]);
        size[x] += size[v[i]];
    }
}

inline void dfsc(int x, int chain)//开始划分重链
{
    int k = 0;++tot;
    pos[x] = tot;
    cc[x] = chain;
    rep(x, i)
        if(deep[v[i]] > deep[x] && size[v[i]] > size[k])//找到一个大小最大的儿子
```

```
            k = v[i];
    if(k == 0)
        return;
    dfsc(k, chain);//优先把最大的儿子划分到重链里

    rep(x, i)
        if(deep[v[i]] > deep[x] && k != v[i])//给剩余的儿子新划分一条重链
            dfsc(v[i], v[i]);
}

inline void build(int k, int l, int r)
{
    node[k].l = l, node[k].r = r;
    if(l == r)
        return;
    int mid = (l + r) >> 1;
    build(k << 1, l, mid);
    build(k << 1 | 1, mid + 1, r);
}

inline void change(int k, int x, int y)
{
    int l = node[k].l, r = node[k].r, mid = (l + r) >> 1;
    if(l == r)
    {
        node[k].s = node[k].mx = y;
        return;
    }
    if(x <= mid)
        change(k << 1, x, y);
    else
        change(k << 1 | 1, x, y);

    node[k].s = node[k << 1].s + node[k << 1 | 1].s;
    node[k].mx = max(node[k << 1].mx, node[k << 1 | 1].mx);
}

inline int qrmx(int k, int x, int y)
{
    int l = node[k].l, r = node[k].r, mid = (l + r) >> 1;
    if(l == x && y == r)
        return node[k].mx;
    if(y <= mid)
        return qrmx(k << 1, x, y);
    else if(x > mid)
        return qrmx(k << 1 | 1, x, y);
    else
        return max(qrmx(k << 1, x, mid), qrmx(k << 1 | 1, mid + 1, y));
}
```

```
inline int qrs(int k, int x, int y)
{
    int l = node[k].l, r = node[k].r, mid = (l + r) >> 1;
    if(l == x && y == r)
        return node[k].s;
    if(y <= mid)
        return qrs(k << 1, x, y);
    else if(x > mid)
        return qrs(k << 1 | 1, x, y);
    else
        return qrs(k << 1, x, mid) + qrs(k << 1 | 1, mid + 1, y);
}

inline int ss(int x, int y)//查询路径权值和
{
    int sum = +0;
    while(cc[x] != cc[y])
    {
        if(deep[cc[x]] < deep[cc[y]])
            swap(x,y);
        sum += qrs(1, pos[cc[x]], pos[x]);
        x=fa[cc[x]];
    }
    if(pos[x] > pos[y])
        swap(x,y);
    sum += qrs(1, pos[x], pos[y]);
    return sum;
}

inline int smx(int x, int y)//查询路径最大值
{
    int ret = -2147483647;
    while(cc[x] != cc[y])
    {
        if(deep[cc[x]] < deep[cc[y]])
            swap(x,y);
        ret = max(ret, qrmx(1, pos[cc[x]], pos[x]));
        x=fa[cc[x]];
    }
    if(pos[x] > pos[y])
        swap(x,y);
    ret = max(ret, qrmx(1, pos[x], pos[y]));
    return ret;
}

inline void solve()
{
    build(1, 1, n);
    for(int i = 1;i <= n;++i)
        change(1, pos[i], X[i]);
    int q, a, b;
```

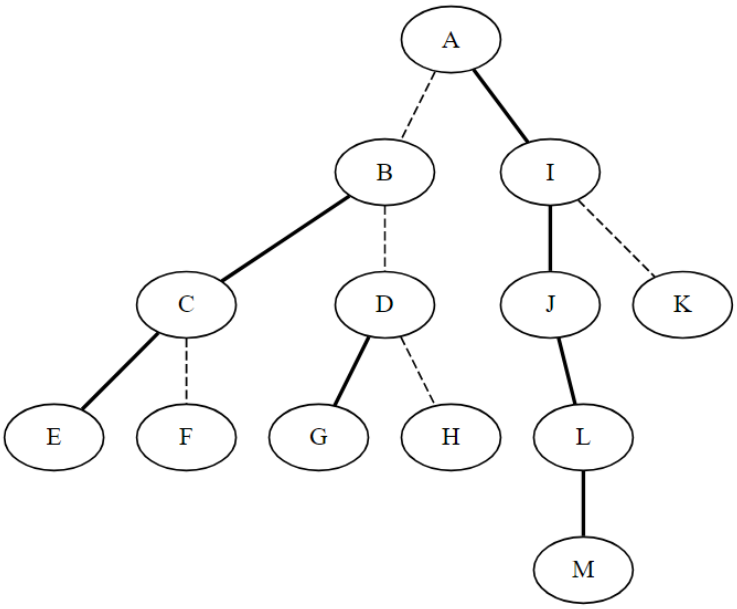
```
    char opt[20];
    q = read();
    for(int i = 1;i <= q;++i)
    {
        scanf("%s%d%d", opt, &a, &b);
        if(opt[0] == 'C')
            change(1, pos[a], b);
        else
        {
            if(opt[1] == 'M')
                printf("%d\n", smx(a, b));
            else
                printf("%d\n", ss(a, b));
        }
    }
}

int main()
{
    scanff();
    dfs(1);
    dfsc(1, 1);
    solve();
    return 0;
}
```

树链剖分求LCA

在上面我们已经提到，按照跳链的策略，能够把两个点都跳到它们LCA所在的重链上，那么当这两个点都跳到同一个重链上时，我们只需要找其中深度更小的那个就能找到两个点的LCA了，时间复杂度$O(\log n)$

长链剖分

与树链剖分不同，我们还可以按照子树中深度最大的叶子深度最大的点进行长链剖分，例如下图



我们仿照重链剖分的方式分析，假设我们现在从i走到了f_i并且经过了一条轻边，那么显然f_i至少还有一个儿子，所以根节点至少还有一个深度不小于dep_i的子树，那么通过计算我们会发现从一个点到根最多经过$O(\sqrt{n})$条轻边和长链。所以，一般情况下，长链剖分的复杂度是不如重链剖分的。但是特定情况下，长链剖分会比重链剖分更优，比如这个问题——在线查询某个点的第k个祖先。

首先，一个点的第k个祖先所在的长链的长度一定不小于k因为如果小于，那么显然我们把那个祖先所在的长链改成连到这个点的链，一定比之前的长链剖分要长，说明之前的剖分是错误的。有了这个结论，我们先长链剖分并求出倍增数组，然后暴力求出每条长链的链顶的第k个祖先以及它向下的k个点，由于长链长度和一定是n所以复杂度为$O(n)$接下来考虑如何在线求出一个节点x的第k个祖先。首先假设不大于k的最大二进制数为k_b则先通过倍增LCA数组从x跳至第k_b个祖先x'处。由于$k - k_b < \frac{k}{2}$根据我们之前证明的结论x'所在的长链长度应不小于k_b也就严格大于$k-k_b$而我们已经预处理出了x'所在长链的顶端向上或向下的不少于$k-k_b$个节点，这一定覆盖了x'的$k-k_b$倍祖先，所以直接利用这个额外信息向上跳即可。