

2020 Petrozavodsk Winter Camp, Jagiellonian U Contest

[比赛链接](#)

B - Binomial

Solved by qxforever.

题目描述

给 $n \leq 10^6$ 个值域在 $[1, 10^6]$ 的数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 求有多少对二元组 (i, j) 满足 $\binom{a_i}{a_j}$ 是奇数。

解题思路

由 Lucas 定理可知

$$\binom{m}{k} \equiv \binom{\lfloor m/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{m \bmod 2}{k \bmod 2} \pmod 2$$

式子为 1，当且仅当不存在某个二进制位上 $m = 0$ 而 $k = 1$ 即 $m \& k = k$ 因此需要对每个 a_i 有多少个 a_j 是它的子集，这用 SOS DP 可以计算得到。

总时间复杂度 $O(\max\{a_i\} \log \max\{a_i\})$

C - Bookface

Upsolved by nikkukun.

题目描述

给 $n \leq 2 \times 10^5$ 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ $x_i \in [0, 3 \times 10^{11}]$ 和一个参数 $d \in [1, 10^6]$ 你可以将这个序列的值任意改动为其余非负整数，使得对任意的 $i \neq j$ 都有 $|x_i - x_j| \geq d$ 代价为每个数的改变量绝对值之和。

求最小代价。

解题思路

不妨考虑先将 x 数组排序，并在维持相对位置的情况下，使得排序后数组 $x_{i+1} - x_i \geq d$ 这样原题的条件便得到满足。

先转化条件为非降序列：要求 $x_{i+1} - x_i \geq d$ 则令 $x'_i = x_i - (i - 1) \cdot d$ 就变成了令 $x'_{i+1} \geq x'_i$ 的条件。

再保证所有数非负：对所有 $x'_i < 0$ 的数，都将其先改为 0 ，并将变化量统计在答案中。此时显然转化回 x_i 的数组既非负，又满足了条件。同时，在 x'_i 中由于所有数也非负，为了用最小代价将 x'_i 变为非降，不会把某些 x'_i 重新调回负数，这并不优。

于是，现在问题变成让 x' 数组非降，而这是经典 L_1 问题，参考 [保序回归问题](#)

E - Contamination

Solved by Potassium.

题目描述

n 个互相无交点的圆是原子弹伤害范围，有 q 次查询，每次查两个位于 x_1 和 x_2 坐标，且 y 坐标可以任意游走于 $[ymin, ymax]$ 的动物能否相遇。

解题思路

有显然结论：如果两动物不能相遇，一定有一个圆跨过 $[ymin, ymax]$ 且位于两点之间。于是将圆和动物都放在 $ymin$ 从小到大枚举，遇到动物就查询中间能够到达的最大 y 值，如果超过 $ymax$ 则无法到达；遇到圆就更新 c_x 处的值为 $c_y + r$

F - The Halfwitters

Upsolved by qxforever.

题目描述

给一个长度 n 的排列，三种操作（交换相邻数字，反转序列，随机排列序列）分别对应花费为 a ， b ， c 要还原成元排列 $p_i = i$ 问期望花费。对每组 (n, a, b, c) 要回答 d 次询问 $\sum_{i=1}^n d_i \cdot 10^5$

解题思路

当不考虑第三种操作时，每个排列的花费是一定的，且只和这个排列的逆序对数 inv 有关，为 $\min(inv \cdot a, (n(n-1)/2 - inv) \cdot b)$ 通过一个 $O(n^2)$ 的 DP 预处理出长度为 n 的排列中逆序对为 inv 的方案数，记为 num_{inv}

现在考虑第三种操作，若当前排列对应的花费较高，我们应该考虑随机这个排列直到它的花费满足要求。因此首先将 $(cost_i, num_i)$ 按照第一维排序。设随机排列花费的期望为 E 则有 $E = \sum_{i=1}^n \frac{cost_i \cdot num_i}{\sum_{i=1}^n num_i} + \frac{c}{2} \cdot E$

$n! = (E+c) \times \sum_{i>j} \text{num}_i + \sum_{i \leq j} \text{num}_i \times \text{cost}_i$ 式子的含义是，若当前排列的花费大于 cost_j 进行随机，否则取当前排列的花费为最终花费。 E 的值与 j 有关，遍历 j 维护 E 的最小值即可。

问题的答案为 $\min(\text{cost}_{\text{inv}}, E+c)$

G - Invited Speakers

Solved by Potassium.

题目描述

签到构造题，跳了

解题思路

H - Lighthouses

Solved by Potassium.

题目描述

给一个凸多边形以及一些顶点间的路，求最长不重复经过点的路径。

解题思路

区间 dp 考虑某个区间不能选和终点位置，向外转移即可。

I - Sum of Palindromes

Solved by Potassium & nikkukun.

题目描述

给一个不超过 10^5 位的十进制数，拆成不超过 25 个回文正数（不含前导零）的和。

例如 $2020 = 2002 + 11 + 7$ 。

解题思路

每次取 n 的前 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 位 a 出来，并反过来接在后面变成 aa^r 作为本次减的数。如果 $n < aa^r$ 则将 a 减去 1 变为 b 后，以 bb^r 作为本次减的数。

观察发现这样操作每次会减少一半的位数，只要 $O(\log \log n)$ 次操作就能分解完毕。

K - To argue, or not to argue

Upsolved by nikkukun.

题目描述

剧场中有 $n \times m$ 个座位，有 k 对双人组前来看剧，组中的两个人应当认为是不同的人。如果双人组相邻地坐着，他们会因为争吵影响别人看剧。现在已知一些位置不能坐，求让这 $2k$ 个人能好好看剧的方案数模 $10^9 + 7$ 。

$n \times m \in [1, 144]$ 保证有不少于 $2k$ 个空位置。

解题思路

容斥。令 $f(i)$ 表示取 i 对双人组相邻地坐着的方案数，则答案为

$$2^k \cdot \left[\sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot i! \cdot f(i) \cdot \binom{\mathrm{res}}{2k-2i} \cdot \frac{(2k-2i)!}{2^{k-i}} \right]$$

其中 res 为空位置的个数。

现在考虑如何求 $f(i)$ （不妨假设 $m \leq n$ 不满足时转置一下），则相当于在有禁位的棋盘上放 i 个骨牌，可以类似插头 DP 一样用一个二进制保存 $m + 1$ 个位置的跨越状态。

在某一行上，令 $g(\mathrm{pos}, \mathrm{cnt}, \mathrm{sta})$ 表示当前处理到的列为 pos 放置了 cnt 个骨牌、插头状态为 sta 的方案数，则处理到最后一行时有 $f(i) = g(m, i, 0)$ （注意要用滚动数组，减少空间开销）。

单次时间复杂度 $O(nmk \cdot 2^{\min\{n, m\}})$

L - Wizards Unite

Solved by nikkukun.

题目描述

有 n 个箱子，每个箱子用金钥匙或银钥匙都可以开，开启时间为 t_i 。金钥匙只有一个，不能同时开几个箱子；银钥匙有 k 个，可以同时开多个箱子。求打开所有箱子的最短时间。

解题思路

排序后贪心用金钥匙开时间最小的 $n-k$ 个箱子即可。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:jagiellonianu2020 

Last update: **2020/07/20 22:21**