

# 2020 Petrozavodsk Winter Camp, Jagiellonian U Contest

[比赛链接](#)

## B - Binomial

Solved by qxforever.

### 题目描述

给  $n \leq 10^6$  个值域在  $[1, 10^6]$  的数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  求有多少对二元组  $(i, j)$  满足  $\binom{a_i}{a_j}$  是奇数。

### 解题思路

由 Lucas 定理可知

$$\binom{m}{k} \equiv \binom{\lfloor m/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{m \bmod 2}{k \bmod 2} \pmod 2$$

式为 1，当且仅当不存在某个二进制位上  $m = 0$  而  $k = 1$  即  $m \& k = k$  因此需要对每个  $a_i$  有多少个  $a_j$  是它的子集，这用 SOS DP 可以计算得到。

总时间复杂度  $O(\max\{a_i\} \log \max\{a_i\})$

## F - The Halfwitters

Upsolved by qxforever.

### 题目描述

给一个长度  $n$  的排列，三种操作（交换相邻数字，反转序列，随机排列序列）分别对应花费为  $a$ ， $b$ ， $c$  要还原成元排列  $p_i = i$  问期望花费。对每组  $(n, a, b, c)$  要回答  $d$  次询问  $n \leq 16, \sum d \leq 10^5$

### 解题思路

当不考虑第三种操作时，每个排列的花费是一定的，且只和这个排列的逆序对数  $inv$  有关，为  $\min(inv \times a, (n(n-1)/2 - inv) \times b)$  通过一个  $O(n^3 2^n)$  的 DP 预处理出长度为  $n$  的排列中逆序对为  $inv$  的方案数，记为  $num_{inv}$

现在考虑第三种操作，若当前排列对应的花费较高，我们应该考虑随机这个排列直到它的花费满足要求。因此首先将  $(cost_i, num_i)$  按照第一维排序。设随机排列花费的期望为  $E$  则有  $E \times n! = (E+c) \times \sum_{i>j} num_i + \sum_{i \leq j} num_i \times cost_i$  式子的含义是，若当前排列的花费大于  $cost_j$  进行随机，否则取当前排列的花费为最终花费  $E$  的值与  $j$  有关，遍历  $j$  维护  $E$  的最小值即可。

问题的答案为  $\min(cost_{inv}, E+c)$

## I - Sum of Palindromes

Solved by Potassium & nikkukun.

### 题目描述

给一个不超过  $10^5$  位的十进制数，拆成不超过 25 个回文正数（不含前导零）的和。

例如  $2020 = 2002 + 11 + 7$ 。

### 解题思路

每次取  $n$  的前  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  位  $aa^r$  出来，并反过来接在后面变成  $aa^r$  作为本次减的数。如果  $n < aa^r$  则将  $aa^r$  减去 1 变为  $bb^r$  后，以  $bb^r$  作为本次减的数。

观察发现这样操作每次会减少一半的位数，只要  $O(\log \log n)$  次操作就能分解完毕。

## K - To argue, or not to argue

Upsolved by nikkukun.

### 题目描述

剧场中有  $n \times m$  个座位，有  $k$  对双人组前来看剧，组中的两个人应当认为是不同的人。如果双人组相邻地坐着，他们会因为争吵影响别人看剧。现在已知一些位置不能坐，求让这  $2k$  个人能好好看剧的方案数模  $10^9 + 7$ 。

$n \times m \in [1, 144]$  保证有不少于  $2k$  个空位置。

### 解题思路

容斥。令  $f(i)$  表示取  $i$  对双人组相邻地坐着的方案数，则答案为

$$2^k \cdot \left[ \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot i! \cdot f(i) \cdot \binom{\text{res}}{2k-2i} \cdot \frac{(2k-2i)!}{2^{k-i}} \right]$$

其中  $\text{res}$  为空位置的个数。

现在考虑如何求  $f(i)$  (不妨假设  $m \leq n$  不满足时转置一下)，则相当于在有禁位的棋盘上放  $i$  个骨牌，可以类似插头 DP 一样用一个二进制保存  $m + 1$  个位置的跨越状态。

在某一行上，令  $g(\text{pos}, \text{cnt}, \text{sta})$  表示当前处理到的列为  $\text{pos}$  放置了  $\text{cnt}$  个骨牌、插头状态为  $\text{sta}$  的方案数，则处理到最后一行时有  $f(i) = g(m, i, 0)$  (注意要用滚动数组，减少空间开销)。

单次时间复杂度  $O(nmk \cdot 2^{\min\{n, m\}})$

## L - Wizards Unite

Solved by nikkukun.

### 题目描述

有  $n$  个箱子，每个箱子用金钥匙或银钥匙都可以开，开启时间为  $t_i$ 。金钥匙只有一个，不能同时开几个箱子；银钥匙有  $k$  个，可以同时开多个箱子。求打开所有箱子的最短时间。

### 解题思路

排序后贪心用金钥匙开时间最小的  $n-k$  个箱子即可。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:jagiellonianu2020&rev=1594455298](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:jagiellonianu2020&rev=1594455298)

Last update: 2020/07/11 16:14