

2020牛客暑期多校训练营（第五场）

[比赛链接](#)

A - Portal

Upsolved by nikkukun.

题目描述

~~推荐购买Portal及《Portal 2》以加深题目理解~~

给一个 $n \leq 300$ 点的带权无向连通图，有 $k \leq 300$ 个任务，第 i 个任务需要从 a_i 移动到 b_i 。当你经过某个节点时，你可以在此打开一个传送门，同一时刻最多只有两个传送门，且你可以随时随地关闭它们。

求完成所有任务的最短路径和。

解题思路

可以发现实际上是依次经过 $2k$ 个关键点 c_1, c_2, \dots, c_{2k} 的任务。

官方题解提供了其他两种复杂度不对，但是具有启发意义的解法：

1. $f(i, u, a, b)$ 完成前 i 个任务，目前在 u 两个传送门在 a 和 b 。由于转移有环，需要用 Dijkstra。
2. $f(i, u, a)$ 完成前 i 个任务，目前在 u 当前位置有一个传送门，另一个在 a 状态的化简是基于传送门一定是用的时候当场打开的观察的。

正解还可以继续精简状态。 $f(i, u, a)$ 表示完成前 i 个任务且站在结束节点上，当前令一个传送门在 a 状态的化简是基于一次任务只会改变最多一次传送门的观察的。这样枚举本次任务后传送门变为 b 有三种转移：

1. $c_i \rightarrow c_{i+1}$ 不用传送门；
2. $c_i \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c_{i+1}$ 使用传送门到 a 然后经过 b 时建立传送门；
3. $c_i \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c_{i+1}$ 经过 b 时建立传送门，然后使用传送门到 a 。

总时间复杂度 $O(kn^2)$

B - Graph

Solved by nikkukun.

题目描述

给一个非负权的树，你可以任意加边或删边，但任意时刻要保证：

1. 连通
2. 任意环异或和为 0

求操作过后整棵树的最小权。

解题思路

不难发现将边权往小修改的操作其实很像最小生成树的过程（接一个环，去掉环上的最大边），又发现这个图实际上一直是一棵生成树，其边权 (u, v) 是原图中 u 到 v 的路径异或和，因此只要求这个图的最小生成树即可。显然，令 $d(u)$ 为 u 到根的路径异或和，则 $d(u) \oplus d(v)$ 就是 u 到 v 的路径异或和。

剩下的就是老问题了。考虑 Kruskal 过程从小到大连边：将所有 $d(i)$ 插入 trie 中，先给子树建好 MST 再往上合并两子树的 MST 合并的过程是要找两个子树中异或的最小值，这个可以暴力在两个子树中递归。由于每个节点只会被暴力搜到 $O(\log V)$ 次，因此总复杂度是正确的。如果不放心，也可以启发式合并维护一个子树的值，用另一个子树去查询最小值。

C - Easy

Upsolved by nikkukun.

题目描述

两个正整数序列 a_1, a_2, \dots, a_k 和 b_1, b_2, \dots, b_k 满足 $\sum_{i=1}^k a_i = n, \sum_{i=1}^k b_i = m$ 对于两序列所有可能的情况，求

$$\prod_{i=1}^k \min(a_i, b_i)$$

之和。其中 $1 \leq n, m \leq 10^6, 1 \leq k \leq \min(n, m)$

解题思路

首先要将 \min 转化为其他方便统计的东西，通常的做法是 $\min(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} [i \leq a] \cdot [i \leq b]$ 这样拆，进而变成对额外变量的统计。这个技巧在 CF 1292C 也有类似应用：

关于一个树上 mex 的推论：

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq u < v \leq n} \mathrm{mex}(u, v) = \sum_{1 \leq x \leq n} \left(\sum_{\mathrm{mex}(u, v) = x} x \right) = \sum_{1 \leq x \leq n} \left(\sum_{\mathrm{mex}(u, v) \geq x} 1 \right) = \sum_{1 \leq x \leq n} f(x) \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 是满足 $\mathrm{mex}(u, v) \geq x$ 的二元组个数。

即是说 mex 和 \min 操作都可以用类似方法解决。因此本题有

$$\prod_{i=1}^k \min(a_i, b_i) = \prod_{i=1}^k \sum_{c_i=1}^{\infty} [c_i \leq a_i] \cdot [c_i \leq b_i]$$

后面的和式代表 i 位置上 (a_i, b_i, c_i) 三元组的合法种类，故由乘法原理可以知道式子实际是对满足条件的 (a_n, b_n, c_n) 三元组计数。不妨钦定 $n \leq m$ 且枚举 $x = \sum_{i=1}^k c_i, x \in [k, n]$ 则插板法得到满足条件的 $\{a_n\}$ 个数为 $\binom{n-x+k-1}{k-1}$ 故可以计算最终答案为

$$\sum_{x=k}^n \binom{n-x+k-1}{k-1} \binom{m-x+k-1}{k-1} \binom{x-1}{k-1}$$

总时间复杂度 $O(T \min(n, m))$

E - Bogo Sort

Solved by Potassium.

水题不表。

I - Hard Math Problem

Solved by nikkukun.

水题不表。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:multi2020-nowcoder-5&rev=1595790228

Last update: 2020/07/27 03:03