

# 2020牛客暑期多校训练营（第五场）

[比赛链接](#)

## A - Portal

Upsolved by nikkukun.

### 题目描述

推荐购买 Portal 以及《Portal 2》以加深题目理解

给一个  $n \leq 300$  点的带权无向连通图，有  $k \leq 300$  个任务，第  $i$  个任务需要从  $a_i$  移动到  $b_i$ 。当你经过某个节点时，你可以在此打开一个传送门，同一时刻最多只有两个传送门，且你可以随时随地关闭它们。

求完成所有任务的最短路径和。

### 解题思路

可以发现实际上是依次经过  $2k$  个关键点  $c_1, c_2, \dots, c_{2k}$  的任务。

官方题解提供了其他两种复杂度不对，但是具有启发意义的解法：

1.  $f(i, u, a, b)$  完成前  $i$  个任务，目前在  $u$  两个传送门在  $a$  和  $b$ 。由于转移有环，需要用 Dijkstra。
2.  $f(i, u, a)$  完成前  $i$  个任务，目前在  $u$  当前位置有一个传送门，另一个在  $a$ 。状态的化简是基于传送门一定是用的时候当场打开的观察的。

正解还可以继续精简状态。  $f(i, a)$  表示完成前  $i$  个任务且站在结束节点上，当前令一个传送门在  $a$ 。状态的化简是基于一次任务只会改变最多一次传送门的观察的。这样枚举本次任务后传送门变为  $b$  有三种转移：

1.  $c_i \rightarrow c_{i+1}$  不用传送门；
2.  $c_i \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c_{i+1}$  使用传送门到  $a$  然后经过  $b$  时建立传送门；
3.  $c_i \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c_{i+1}$  经过  $b$  时建立传送门，然后使用传送门到  $a$ 。

总时间复杂度  $O(kn^2)$

## B - Graph

Solved by nikkukun.

## 题目描述

给一个非负权的树，你可以任意加边或删边，但任意时刻要保证：

1. 连通
2. 任意环异或和为  $0$

求操作过后整棵树的最小权。

## 解题思路

不难发现将边权往小修改的操作其实很像最小生成树的过程（接一个环，去掉环上的最大边），又发现这个图实际上一直是一棵生成树，其边权  $(u, v)$  是原图中  $u \rightarrow v$  的路径异或和，因此只要求这个图的最小生成树即可。显然，令  $d(u)$  为  $u$  到根的路径异或和，则  $d(u) \oplus d(v)$  就是  $u \rightarrow v$  的路径异或和。

剩下的就是老问题了。考虑 Kruskal 过程从小到大连边：将所有  $d(i)$  插入 trie 中，先给子树建好最小生成树再往上合并两子树的最小生成树合并的过程是要找两个子树中异或的最小值，这个可以暴力在两个子树中递归。由于每个节点只会被暴力搜到  $O(\log V)$  次，因此总复杂度是正确的。如果不放心，也可以启发式合并维护一个子树的值，用另一个子树去查询最小值。

## C - Easy

Upsolved by nikkukun.

## 题目描述

两个正整数序列  $a_1, a_2, \dots, a_k$  和  $b_1, b_2, \dots, b_k$  满足  $\sum_{i=1}^k a_i = n, \sum_{i=1}^k b_i = m$  对于两序列所有可能的情况，求

$$\prod_{i=1}^k \min(a_i, b_i)$$

之和。其中  $1 \leq n, m \leq 10^6, 1 \leq k \leq \min(n, m)$

## 解题思路

首先要将  $\min$  转化为其他方便统计的东西，通常的做法是  $\min(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} [i \leq a] \cdot [i \leq b]$  这样拆，进而变成对额外变量的统计。这个技巧在 CF 1292C 也有类似应用：

关于一个树上 mex 的推论：

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq u < v \leq n} \text{mex}(u, v) = \sum_{1 \leq x \leq n} \left( \sum_{\text{mex}(u, v) = x} x \right) = \sum_{1 \leq x \leq n} \left( \sum_{\text{mex}(u, v) \geq x} 1 \right) = \sum_{1 \leq x \leq n} f(x) \end{aligned}$$

其中  $f(x)$  是满足  $\text{mex}(u, v) \geq x$  的二元组个数。

即是说  $\mathrm{mex}$  和  $\min$  操作都可以用类似方法解决。因此本题有

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \min(a_i, b_i) = \prod_{i=1}^k \sum_{c_i=1}^{\infty} [c_i \leq a_i] \cdot [c_i \leq b_i] \end{aligned}$$

后面的和式代表  $i$  位置上  $(a_i, b_i, c_i)$  三元组的合法种类，故由乘法原理可以知道式子实际是对满足条件的  $(\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\})$  三元组计数。不妨钦定  $n \leq m$  且枚举  $x = \sum_{i=1}^k c_i, x \in [k, n]$  则插板法得到满足条件的  $\{a_n\}$  个数为  $\binom{n-x+k-1}{k-1}$  故可以计算最终答案为

$$\sum_{x=k}^n \binom{n-x+k-1}{k-1} \binom{m-x+k-1}{k-1} \binom{x-1}{k-1}$$

总时间复杂度  $O(T \min(n, m))$

## E - Bogo Sort

Solved by Potassium.

水题不表。

## H - Interval

Upsolved by nikkukun.

### 题目描述

给长度为  $n \leq 10^5$  值域在  $[0, 2^{30})$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  强制在线  $q \leq 10^5$  次询问下标  $[l, r]$  的所有子区间中，区间按位与能获得的值的个数。

### 解题思路

比赛时想到了对于确定的左端点，其右端点最多能产生  $O(\log V)$  个值，因此实际只需要统计  $[l, r]$  里包含了多少个这样的极小区间即可，这是一个二维偏序问题。但是这样显然是不行的，同一个值只能统计一次，当时并没有想到如何消除影响。

题解给出了一种很妙的做法：对同一个值的所有区间，首先消除掉所有包含关系（事实上，如果一开始找区间就选的极小区间，是不会出现除了全等之外的包含关系的），并按左端点依次排序为  $(l_1, r_1), (l_2, r_2), \dots, (l_k, r_k)$  额外添加  $k-1$  个区间  $(l_1, r_2), (l_2, r_3), \dots, (l_{k-1}, r_k)$  并令其贡献为  $-1$ ，则刚才的统计就是对的了。

可以手玩一下上面的构造，当包含了相邻两个区间时会自动让结果  $-1$ ，这个结果在两区间相交与否的情况都成立。

## I - Hard Math Problem

Solved by nikkukun.

水题不表。

## K - Git Merge

Upsolved by nikkukun.


### 题目描述

给一段用 Git Merge 的、有两个 branch 的代码，需要你重新合并出一个最少行的结果，具体操作请参考原题。输入总行数不超过 \$4000\$ 行。

### 解题思路

先把两段源代码还原出来，令  $f(i, j, \text{op})$  为处理了第一段代码的前  $i$  行、第二段代码的前  $j$  行，目前正处于第一段单独区间/第二段单独区间/两段共用区间的最小行数，不同  $\text{op}$  之间的切换会增加一行的代价，DP 转移即可。可能需要用哈希判断行相等，用 short 存数组减少空间。

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:multi2020-nowcoder-5&rev=1596118244](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:multi2020-nowcoder-5&rev=1596118244) 

Last update: 2020/07/30 22:10