

# 2020牛客暑期多校训练营（第六场）

[比赛链接](#)

## A - African Sort

Solved by qxforever.

### 题目描述

给一个长度为  $n$  的排列，每次可以选任意多个下标 shuffle 这些下标的元素，花费为选中下标的数量。问最优策略下把排列还原为元排列的期望花费  $n \leq 10^5$

### 解题思路

假题了。对长度为  $x$  的循环节，通过样例以及手玩算出 std 是把  $x$  个一起 shuffle 的，然后能推出形式很简单的式子，设花费为  $f$  有  $f_n = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{i}$  很好实现。

可惜是假的。比如  $x=4$  样例给的花费为  $\frac{34}{3}$  其实选 3 个 shuffle 的花费是  $\frac{45}{4}$  更优一些。当时还以为自己算错了，反正比赛的时候硬往  $\frac{34}{3}$  上凑就完事了。

## B - Binary Vector

Solved by qxforever.

### 题目描述

问随机  $n \times n$  的 01 矩阵，满秩的概率是多少  $n \leq 2 \times 10^7$

### 解题思路

设  $n$  阶 01 矩阵满秩的数量为  $f_n$  有递推关系  $f_i = f_{i-1} \times 2^{i-1} \times (2^{i-1} - 1)$  然后除上  $2^{i^2}$  就是概率  $n$  的范围很大  $O(n \log n)$  是不能通过此题的。需要预处理  $2$  的幂次以及逆元的幂次做到线性。

## C - Combination of Physics and Maths

Solved by qxforever.

## 题目描述

签到题

## E - Easy Construction

Solved by qxforever.

## 题目描述

签到题

## G - Grid Coloring

Solved by nikkukun.

## 题目描述

给一个  $n \times n$  的网格，用  $k$  种颜色给每条网格边框涂色，使得：

1. 所有颜色出现次数相同
2. 不存在同色的环
3. 一行或一列边框至少有两种颜色

构造方案，或说明无解。

## 解题思路

首先应当满足  $k \mid 2(n+1)n$  且  $n \geq 2$  和  $k \geq 2$  时才有解。

一种构造方法是，先依次把所有横边填满，再把纵边填满。若  $k \mid n$  就在奇数行用  $1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k$  把横边填满，在偶数行用  $2, 3, \dots, k, 1, 2, 3, \dots, k, 1$  把横边填满。对纵边也这么处理，这样相邻行的横边不会有相同颜色。

否则  $k \nmid n$  直接  $1, 2, \dots, k$  一行接一行地连续填下去，不需要对相邻行额外去错开一个颜色，也能让相邻行的横边不会有相同颜色。

这样做出来的图，一个方格中最多有两条边相同颜色，且任意两条横向相邻或纵向相邻的边颜色不同，手玩发现这样的性质是搞不出同色的环的，因此满足条件。

## H - Harmony Pairs

Solved by nikkukun & Potassium.

### 题目描述

令  $S(x)$  表示  $x$  的十进制表示的数位和，求  $S(A) > S(B)$  且  $0 \leq A \leq B \leq N$  的  $(A, B)$  个数，其中  $N \in [0, 10^{\{100\}}]$

### 解题思路 1

数位 DP 令  $n$  为  $N$  的长度  $f(p, x, f_1, f_2)$  表示处理好了  $[p, n]$  区间的位置  $S(A) - S(B) = x$  且  $f_1 = [A \leq B], f_2 = [B \leq N]$  时的方案数，则 DP 过程和转移就很好写了。总时间复杂度  $O(n \cdot d \cdot d^2)$  其中  $d$  表示十进制数位大小。

### 解题思路 2

奇怪的数位 DP 比赛时忘记咋写正常的数位 DP 了，写了一个不正常的数位 DP

考虑  $A$  和  $B$  公共前缀相同时，实际只需要令不同的后缀位置满足  $A < B$ （不取等），且数位和  $S(A) > S(B)$  即可。假设第一个不同的位置上  $B$  的值为  $c$  则从小到大枚举  $c$  对于当前枚举到的  $c$  而言，之前所有计算的  $c'$  都能对  $c$  做出贡献（都比它小），只要能维护所有  $c' < c$  且数位和为  $> x$  的数的个数，即可  $O(x)$  完成单个  $c$  的统计与维护。

令  $f(n, x, f_1)$  表示仅考虑  $[p, n]$  区间的数  $C$  数位和为  $x$  且  $f_1 = [C \leq N]$  的数的个数。这个东西是可以和上面无关独立计算的，当考虑  $[p, n]$  且枚举  $c$  时，只需要用已经计算出来  $f(p+1, x-c, f_1)$  就可以得到满足条件的数的贡献。

总时间复杂度同上。

## J - Josephus Transform

Upsolved by qxforever.

### 题目描述

给一个长度为  $n$  的排列，有  $m$  次操作，每次操作  $(k_i, x_i)$  表示将当前排列玩  $x_i$  次每  $k_i$  个人出局的约瑟夫游戏。输出最终的排列  $n \times m \leq 10^6, x_i \leq 10^9$

### 解题思路

每次约瑟夫问题相当于一个置换，玩  $x$  次相当于置换的  $x$  次方。在求出这个置换后可以  $n \log x$  的算出置换的  $x$  次方。

求解约瑟夫问题的顺序，需要一种数据结构，可以查询当前数的排名 +  $k$  的排名的数。比赛的时候由于没剩多少时间，偷懒用了 `pb_ds` 库的红黑树，`tree.find_by_order()` 可以根据排名查询。线段树上二分的常数应该更小。

## K - K-Bag

Solved by qxforever & nikkukun.

### 题目描述

给一个长度为  $n$  的序列，问这个序列是否为一些长度为  $k$  的排列组成的序列的子序列。比如  $k=3$  则  $2,3,1,2,3,3,2$  是，而  $2,3,2,3,2,3$  不是  $\sum n \leq 2 \times 10^6$   $k \leq 10^9$

### 解题思路

考虑 dp 设  $f_i$  表示前  $i$  个数是否满足，可以从  $\max(i-k, 0)$  转移过来。如果  $i+k > n$  也从  $f_i$  转移到  $f_n$  转移就是判断  $[l, r]$  区间的数是否最多出现一次。待判断区间的左右端点均有单调性，因此 dp 的时间复杂度是  $O(n)$  的。

注意到  $k$  的范围很大，不可能用数组记录每个数出现的次数  $2e6$  范围的 map 不能确定效率是否足够高，比赛中采用了离散化通过了此题。

### 赛后总结

#### nikkukun

一开始 H 读错题，写完才发现不对劲。后来写的时候也没想清楚数位 DP 的写法，占了大约一个多小时的思考时间。而且码力很弱，中途卡了好几次，以后开到细节题一定要和队友讨论下咋写。主要是对数位 DP 不熟，需要加强相关练习与 DP 技巧。

K 猜了假结论，而且为了把假结论圆回来还贡献了四发罚时，前期题 WA 了两次的时候就应该考虑换人而不是继续救假代码了。话说我经常喜欢先猜结论，但往往都猜不中，没有把握的时候要和队友确认一下正确性。

#### qxforever

前面发挥还比较正常。最后 10min 脑子进水，遇到不确定的还是要和队友确认下，厘清思路。

#### Potassium

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:multi2020-nowcoder-6&rev=1595930375](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:multi2020-nowcoder-6&rev=1595930375)

Last update: **2020/07/28 17:59**

