

# 2020牛客暑期多校训练营（第九场）

[比赛链接](#)

## A - Groundhog and 2-Power Representation

Solved by .

题目描述

解题思路

## B - Groundhog and Apple Tree

Solved by .

题目描述

解题思路

## C - Groundhog and Gaming Time

Upsolved by nikkukun.

题目描述

给定  $n \leq 5 \times 10^5$  个区间  $[l_i, r_i]$  每个区间都会独立地以  $\frac{1}{2}$  的概率被选中，求所有被选中的区间的交集长度的平方和的期望。

注意这里  $[L, R]$  的长度是按  $R - L + 1$  算，出题人不会好好说话，被坑了。

解题思路

令所有区间端点在数轴的投影将数轴分割成了长度为  $s_1, s_2, \dots, s_m$  的  $m$  个连续的线段，记  $p_i \in \{0, 1\}$  表示其中的线段  $s_i$  是否在结果的交集中，则题目求的是

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{i=1}^m s_i p_i \right)^2 \right] &= E \left[ \sum_{i=1}^m (s_i p_i)^2 + 2 \sum_{i \neq j} s_i p_i \cdot s_j p_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^m E \left[ s_i^2 \cdot p_i \right] + \sum_{i \neq j} E \left[ s_i s_j \cdot p_i p_j \right] \end{aligned}$$

对于前面那部分，如果有  $k$  个原来的线段覆盖了  $s_i$  那么在所有  $2^n$  种情况里，只有恰好  $2^{k-1}$  种区间选择方法可以让  $p_i = 1$  有贡献  $\frac{2^{k-1}}{2^n} \cdot s_i^2$  否则为  $0$ 。这部分可以直接  $O(n)$  枚举计算。

后面的部分类似，假设有  $k$  个线段恰好能覆盖掉  $s_i$  和  $s_j$  那么只有恰好  $2^{k-1}$  种区间选择方法可以让  $p_i = p_j = 1$  有贡献  $\frac{2^{k-1}}{2^n} \cdot s_i s_j$  否则为  $0$ 。

为了不暴力枚举  $i, j$  计算后面的部分，考虑从小到大枚举  $j$  一次计算  $i < j$  的所有  $i$  的贡献。假设我们有一个线段树维护了  $i \in [1, j]$  之间，既覆盖了  $s_j$  又覆盖了  $s_i$  的原线段个数  $k_i$  那么也可以同时维护  $\frac{2^{k_i-1}}{2^n} \cdot s_i s_j$  之和，单独把那个  $1$  提出来后就能维护。每次从  $j$  移动到  $j+1$  时，更新  $s_{j+1}$  导致的区间  $k$  的增减即可计算答案。

总时间复杂度  $O(n \log n)$

## E - Groundhog Chasing Death

Solved by nikkukun.

### 题目描述

计算

$$\prod_{i=a}^b \prod_{i=c}^d \gcd(x^i, y^j) \bmod 998244353$$

其中  $0 \leq a, b, c, d \leq 3 \times 10^6, 1 \leq x, y \leq 10^9$

### 解题思路

为了方便表述，记  $A = \max\{a, b, c, d\}, B = \max\{x, y\}$

考虑每个质因子  $p$  对指数的贡献，并令  $s, t$  为使得  $p^s \mid x$  与  $p^t \mid y$  成立的最大整数，则贡献为  $\sum_{i=a}^b \sum_{i=c}^d \min(s_i, t_j) = \sum_{u=1}^{\infty} \left( \sum_{i=a}^b [u \leq s_i] \right) \left( \sum_{i=c}^d [u \leq t_j] \right)$

这一部分暴力枚举  $u$  可以做到  $O(A \log B)$  而由于使得  $s, t > 0$  的质数  $p$  只有  $O(\log B)$  个，故对每个有贡献的质数都计算一次的总时间复杂度为  $O(A \log^2 B)$

另外计算时用容斥把式子拆成四组前缀和的加加减减会好写很多。

## F - Groundhog Looking Dowdy

Solved by .

## 题目描述

## 解题思路

# I - The Crime-solving Plan of Groundhog

Solved by nikkukun.

## 题目描述

给  $n$  个数，分成两个部分，每部分没有前导零且是正数，最小化这两个数的乘积并输出  $\sum_{n \leq 10^6} \square$  所有数都是  $[0, 9]$ 。

## 解题思路

猜测答案是一位数与剩余能组成的最小的数的乘积，枚举一位数是什么即可。实际上一位数只能是最小的数，可以不枚举。

# J - The Escape Plan of Groundhog

Solved by nikkukun.

## 题目描述

给一个  $n \times m$  的  $01$  矩阵  $a_{n \times m}$  统计满足条件的子矩阵：

1. 子矩阵的四边都是  $1$
2. 除了四边之外，子矩阵的  $0$  和  $1$  数量差不超过  $1$
3. 子矩阵长和宽不小于  $1$

$n, m \leq 500$

## 解题思路

一般这种题都是枚举一维的上下两个边界，剩下一维做前缀和处理。对于剩下这维，实际是对依次考虑每个满足全  $1$  的左边界，寻找有多少全  $1$  的右边界满足  $[a_{ij} = 1] - [a_{ij} = 0]$  的前缀和与它的前缀和差不超过  $1$ ，这里用类似双指针的方法移动就可以维护相关信息。

总时间复杂度  $O(n^3)$

## K - The Flee Plan of Groundhog

Solved by nikkukun.

### 题目描述

给一个  $10^5$  结点的树 A 在  $u$  且速度是  $1$  B 在  $v = n$  且速度是  $2$ 。现在 B 抓 A A 可以到处逃，问最久可以逃多久。

### 解题思路

暴力做，枚举终点  $x$  计算 A 和 B 跑过去会不会在中途相遇（满足  $2 \cdot \text{dist}(u, x) \leq \text{dist}(v, x)$  就不相遇），顺便计算所需时间即可。

## 赛后总结

### nikkukun

1. 做题之前一定要先按题意把样例算一下，避免读错题或者是写错算法的情况发生；
2. 如果某个算法渐进意义明显超时了，那就不要加优化多次提交了，考虑能不能把复杂度降低一个等级；
3. 数量级很大的时候，不要用 `map<int, vector<int> >`，会卡爆。

### qxforever

### Potassium

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:multi2020-nowcoder-9&rev=1596901711](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:multi2020-nowcoder-9&rev=1596901711)

Last update: 2020/08/08 23:48