

2020牛客暑期多校训练营（第九场）

[比赛链接](#)

A - Groundhog and 2-Power Representation

Solved by .

题目描述

解题思路

B - Groundhog and Apple Tree

Solved by qxforever.

题目描述

给一棵 n 个点的树，第一次经过一个点可以回复 a_i 点血量，经过一条边消耗 w_i 点血量，休息一次恢复 1 点血量。初始在 1 号点 hp 为 0 。问按某种 dfs 序访问所有点再回到 1 号点最少需要休息几次
 $\sum n \leq 10^6$

解题思路

考虑 dp 设 f_i 为在 i 号点 hp 为 0 时遍历 i 的子树需要的休息次数 g_i 为 i 的子树的点权 $-$ 边权。休息次数可以转化为访问过程中 hp 最小值的相反数。

对于儿子 j 将最多花费 $f_j + w + \max(w - f_j - g_j, 0)$ 点 hp 回复 $g_j - 2w$ 点 hp 记为 (u_j, v_j) 问题在于如何决策访问儿子的顺序。将儿子分为访问过后 hp 增加的和不增加的两组。

首先访问 $v \geq 0$ 的儿子，我们按照 u 递增的顺序访问，维护 hp 的最小值。因为每次访问后 hp 都会增加，因此这样的顺序是最优的。

对于 $v < 0$ 我们需要按照 $u + v$ 递减的顺序访问。简单证明如下：设两点 (u_1, v_1) (u_2, v_2) 当前 hp 为 c 若在不休息的情况下只能先访问 1 后访问 2 ，有 $u_2 \leq c + v_1$ $u_1 > c + v_2$ 即 $u_2 + v_2 \leq c < u_1 + v_1$ 一个例子是 hp 为 6 ，两对为 $(5, -3), (4, -1)$ 。

时间复杂度 $O(n \log n)$

C - Groundhog and Gaming Time

Upsolved by nikkukun.

题目描述

给定 $n \leq 5 \times 10^5$ 个区间 $[l_i, r_i]$ 每个区间都会独立地以 $\frac{1}{2}$ 的概率被选中，求所有被选中的区间的交集长度的平方和的期望。

注意这里 $[L, R]$ 的长度是按 $R - L + 1$ 算，出题人不会好好说话，被坑了。

解题思路

令所有区间端点在数轴的投影将数轴分割成了长度为 s_1, s_2, \dots, s_m 的 m 个连续的线段，记 $p_i \in \{0, 1\}$ 表示其中的线段 i 是否在结果的交集中，则题目求的是

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum_{i=1}^m s_i p_i \right)^2 \right] &= E \left[\sum_{i=1}^m (s_i p_i)^2 + \sum_{i \neq j} s_i p_i \cdot s_j p_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^m E \left[s_i^2 \cdot p_i \right] + \sum_{i \neq j} E \left[s_i s_j \cdot p_i p_j \right] \end{aligned}$$

对于前面那部分，如果有 k 个原来的线段覆盖了 s_i 那么在所有 2^n 种情况里，只有恰好 $2^k - 1$ 种区间选择方法可以让 $p_i = 1$ 有贡献 $\frac{2^k - 1}{2^n} \cdot s_i^2$ 否则为 0 。这部分可以直接 $O(n)$ 枚举计算。

后面的部分类似，假设有 k 个线段恰好能覆盖掉 s_i 和 s_j 那么只有恰好 $2^k - 1$ 种区间选择方法可以让 $p_i = p_j = 1$ 有贡献 $\frac{2^k - 1}{2^n} \cdot s_i s_j$ 否则为 0 。

为了不暴力枚举 i, j 计算后面的部分，考虑从小到大枚举 j 一次计算 $i < j$ 的所有 i 的贡献。假设我们有一个线段树维护了 $i \in [1, j]$ 之间，既覆盖了 s_j 又覆盖了 s_i 的原线段个数 k_i 那么也可以同时维护 $\frac{2^{k_i} - 1}{2^n} \cdot s_i s_j$ 之和，单独把那个 1 提出来后就能维护。每次从 j 移动到 $j+1$ 时，更新 s_{j+1} 导致的区间 k 的增减即可计算答案。

总时间复杂度 $O(n \log n)$

E - Groundhog Chasing Death

Solved by nikkukun.

题目描述

计算

$$\prod_{i=a}^b \prod_{i=c}^d \gcd(x^i, y^j) \pmod{998244353}$$

其中 $0 \leq a, b, c, d \leq 3 \times 10^6$ $1 \leq x, y \leq 10^9$

解题思路

为了方便表述，记 $A = \max\{a, b, c, d\}$, $B = \max\{x, y\}$

考虑每个质因子 p 对指数的贡献，并令 s, t 为使得 $p^s \mid x$ 与 $p^t \mid y$ 成立的最大整数，则贡献为 $\sum_{i=a}^b \sum_{i=c}^d \min(s_i, t_j) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\sum_{i=a}^b [u \leq s_i] \right) \left(\sum_{i=c}^d [u \leq t_j] \right)$

这一部分暴力枚举 u 可以做到 $O(A \log B)$ 而由于使得 $s, t > 0$ 的质数 p 只有 $O(\log B)$ 个，故对每个有贡献的质数都计算一次的总时间复杂度为 $O(A \log^2 B)$

另外计算时用容斥把式子拆成四组前缀和的加加减减会好写很多。

F - Groundhog Looking Dowdy

Solved by .

题目描述

解题思路

I - The Crime-solving Plan of Groundhog

Solved by nikkukun.

题目描述

给 n 个数，分成两个部分，每部分没有前导零且是正数，最小化这两个数的乘积并输出 $\sum_{n \leq 10^6}$ 所有数都是 $[0, 9]$ 。

解题思路

猜测答案是一位数与剩余能组成的最小的数的乘积，枚举一位数是什么即可。实际上一位数只能是最小的数，可以不枚举。

J - The Escape Plan of Groundhog

Solved by nikkukun.

题目描述

给一个 $n \times m$ 的 01 矩阵 $a_{n \times m}$ 统计满足条件的子矩阵：

1. 子矩阵的四边都是 1
2. 除了四边之外，子矩阵的 0 和 1 数量差不超过 1
3. 子矩阵长和宽不小于 1

$n, m \leq 500$

解题思路

一般这种题都是枚举一维的上下两个边界，剩下一维做前缀和处理。对于剩下这维，实际是对依次考虑每个满足全 1 的左边界，寻找有多少全 1 的右边界满足 $[a_{ij} = 1] - [a_{ij} = 0]$ 的前缀和与它的前缀和差不超过 1 ，这里用类似双指针的方法移动就可以维护相关信息。

总时间复杂度 $O(n^3)$

K - The Flee Plan of Groundhog

Solved by nikkukun.

题目描述

给一个 10^5 结点的树 A 在 u 且速度是 1 B 在 $v = n$ 且速度是 2 。现在 B 抓 A A 可以到处逃，问最久可以逃多久。

解题思路

暴力做，枚举终点 x 计算 A 和 B 跑过去会不会在中途相遇（满足 $2 \cdot \text{dist}(u, x) \leq \text{dist}(v, x)$ 就不相遇），顺便计算所需时间即可。

赛后总结

nikkukun

1. 做题之前一定要先按题意把样例算一下，避免读错题或者是写错算法的情况发生；
2. 如果某个算法渐进意义明显超时了，那就不要加优化多次提交了，考虑能不能把复杂度降低一个等级；
3. 数量级很大的时候，不要用 `map<int, vector<int>>`，会卡爆。

qxforever

Potassium

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:multi2020-nowcoder-9&rev=1597070434 

Last update: **2020/08/10 22:40**