环空间

如果两个环可以异或相消，则一个图中的所有简单环，可以由某个钦定的点 u 为始末点的所有简单环组合得到。实现可以用 DFS，记录第一次访问到某个点时的路径异或值 dis_u，则每次访问到已经经过的点时，只需要把当前的异或值和 dis_u 异或一下就成了一个环。显然，这样找到的环的个数是 $\mathcal{O}(V + E)$ 的。

仔细想想，上面的过程实际就是随便找了一棵生成树（DFS 树），然后把所有非树边和两点最短路径相连，就构成了一个基本环。如果相连的是一个树边也无所谓，反正绕成一圈之后就完全没贡献了。

这个是 WC2011 最大 XOR 和路径的结论，除此之外还有另一个结论：如果路径也可以异或，那么一条从 u 到 v 的路径异或上很多环，得到的仍然是一条从 u 到 v 的合法路径。

注意因为有重边，所以可以走回父亲的边……这个地方很容易出问题，因为不走回父亲的边会 continue，少计算一个可能有代价的环。

在上文所述的情况下，如果要你走一个以 u 为始末点的环，那其实就是唬人的：如果环不经过 u，则从 u 走到环上再走回 u 后就满足条件了，且异或和相等。

关于 Cycle Space

具体来说，上图其实说明了这么一件事：一个图 G 的满生成森林（Full Spaning Forest）加上任意一条不在森林中的边构成的环，形成了 F 的一个基础环（Fundamental Cycle of G）。其中，图 G 的满生成森林是每个连通分量的任意一棵生成树构成的集合。

我们把图 G 中与满生成森林 F 关联的所有基础环的集合称为基础环系。设 T 是连通图 G 的一个最小生成树，则与 T 关联的基础环系是圈空间 $W_c(G)$ 的一组基，且基的大小恰为 $m - n + c$，其中每个参数含义见下文。

> This number is called the **circuit rank** of the graph, and it equals $m - n + c$, where m is the number of edges in the graph, n is the number of vertices, and c is the number of connected components.

也就是说，一个连通分量中非树边构成的所有环，可以通过异或组合得到该连通分量的所有环，并且这些环恰好相互独立。我们把所有连通分量中基础环系的大小之和称为环秩（Circuit Rank）或环空间的维度（Dimension of Cycle Space）。显然，基础环系中构成的都是简单环，而通过基础环系组合出来的环可以不是简单环。

利用基础环可以化简回路方程。只要把回路中相互独立的方程组列出来，就是秩最小的方程组，这个只需要列出所有的基础环即可。

（以上部分内容由@roife 翻译，部分来自 Wikipedia）