2025/12/02 18:07 1/2 生成函数

# 生成函数

本文主要做一个归纳性的总结。

常见的生成函数形式:

- 普通型生成函数□\$f(x) = \sum\_{i=0}^{\infty} a\_i x^i\$
- 指数型生成函数□\$f(x) = \sum\_{i=0}^{\infty} \dfrac {a\_i}{i!} x^i\$

### 普通型生成函数

形式幂级数  $\sum_{i=0}^{i=0}^{i=0}^{i=0}$  a^i x^i =  $\frac{1 - ax}$  并不太关注 \$x\$ 的取值是否使得式子收敛。给出一些常用生成函数的封闭形式:

• 完全背包生成函数

 $s\ \sum_{i=0} ^{\left(i=0\right)} x^{ai} = \frac{1{1-x^a}}{$ 

• 不知道什么的生成函数

s \sum {i=0} ^{\infty} a^i x^i = \frac 1{1-ax} \$\$

• 二项式形式的生成函数

• 广义二项式定理的生成函数

s=0 ^{\infty} \binom{n+i-1}{i}x^i = \frac {1}{(1-x)^n} \$\$

令:扩展组合数为  $h=(-1)^k \cdot n+k-1$   $h=(-1)^k \cdot n+k-1$  h

#### 普通型生成函数与可逆背包

一个非常棒的可逆背包题: 2018 沈阳 ICPC 现场 M 题。

s \sum {i=0} \n x^{ai} = \frac {1-(x^a)^{n+1}}{1-x^a} \$\$

上面是个负方案的01背包,下面是个完全背包,没了。

### 指数型生成函数

一些常见的指数型生成函数化简技巧:

 $= \frac{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}2$ 

s=0 ^{\infty} \frac  $x^{2i+1}$ {(2i+1)!} = \frac {\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}2

uodate: update: 2020/2021:teams:i\_dont\_know\_png:nikkukun:generating-function https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\_dont\_know\_png:nikkukun:generating-function&rev=1596794872 18:07

\$\$

这个性质可以将生成函数化成封闭形式。反过来,也可以将封闭形式转化为级数形式:

 $\$  \mathrm{e}^{ax} = \sum\_{i=0} ^{\infty} \frac {a^i x^i}{i!} \$\$

注意因为是求排列,所以一般最后要乘一个 \$n!\$□

#### 指数型生成函数与集合划分

考虑一些具有性质 \$A\$ 的东西的指数型生成函数 \$F(x)\$\[现在把 \$A\$ 里面的东西当成基本元素,像选物品一样合在一起获得具有 \$B\$ 性质的东西(也就是 \$B\$ 是几个 \$A\$ 属性的东西拼成的),且 \$B\$ 的生成函数是 \$G(x)\$\[则

 $SG(x) = \mathrm{mathrm}\{e\}^{F(x)}$ 

**例子**1 令 \$F(x)\$ 为 \$n\$ 个点的无向连通图个数□\$G(x)\$ 为 \$n\$ 个点的任意图数量(且显然 \$G(x) = \sum \_{i=0}^{\infty} 2^{i(i-1)/2}x^i\$□因此 \$F(x) = \ln G(x)\$□

例子  $2 \Leftrightarrow F(x)$  \$ 为 \$n\$ 个点的连通 DAG 个数[]\$G(x)\$ 为不要求连通的 \$n\$ 个点的 DAG 个数,显然这也同样满足集合划分要求。一个小证明[]\$G(x)\$ 是 \$F(x)\$ 的一个划分,因此对 \$G(x)\$ 枚举它由几个 \$F(x)\$ 构成,即

 $\$  \begin{aligned} G(x) &= \sum \_{i=0} ^{\infty} \frac {F^i(x)}{i!} \&= \mathrm{e}^{F(x)} \end{aligned} \$\$

利用该性质可以极大化简某些过程。

## 参考资料

• 生成函数简介 - \_rqy's Blog

From:

https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\_dont\_know\_png:nikkukun:generating-function&rev=1596794872

Last update: 2020/08/07 18:07



https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/12/02 18:07