

# 生成函数

本文主要做一个归纳性的总结。

常见的生成函数形式：

- 普通型生成函数  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$
- 指数型生成函数  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$

## 普通型生成函数

形式幂级数  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i = \frac{1}{1-ax}$  并不太关注  $x$  的取值是否使得式子收敛。给出一些常用生成函数的封闭形式：

- 完全背包生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

- 不知道什么的生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i = \frac{1}{1-ax}$$

- 二项式形式的生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

- 广义二项式定理的生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i = \frac{1}{(1-x)^n}$$

令：扩展组合数为  $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$  这个展开就可以验证了。带入二项式定理中可以得到广义二项式定理（见上）。

## 普通型生成函数与可逆背包

一个非常棒的可逆背包题：2018 沈阳 ICPC 现场 M 题。

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1-(x^a)^{n+1}}{1-x^a}$$

上面是个负方案的 01 背包，下面是个完全背包，没了。

## 指数型生成函数

一些常见的指数组合化简技巧：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

\$\$

这个性质可以将生成函数化成封闭形式。反过来，也可以将封闭形式转化为级数形式：

$$\$ \$ \mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i x^i}{i!}} \$ \$$$

注意因为是求排列，所以一般最后要乘一个  $n!$

## 指类型生成函数与集合划分

考虑一些具有性质  $A$  的东西的指类型生成函数  $F(x)$  现在把  $A$  里面的东西当成基本元素，像选物品一样合在一起获得具有  $B$  性质的东西（也就是  $B$  是几个  $A$  属性的东西拼成的），且  $B$  的生成函数是  $G(x)$  则

$$\$ \$ G(x) = \mathrm{e}^{F(x)} \$ \$$$

例子 1 令  $F(x)$  为  $n$  个点的无向连通图个数  $G(x)$  为  $n$  个点的任意图数量（且显然  $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(i-1)/2} x^i$ ）因此  $F(x) = \ln G(x)$

例子 2 令  $F(x)$  为  $n$  个点的连通 DAG 个数  $G(x)$  为不要求连通的  $n$  个点的 DAG 个数，显然这也同样满足集合划分要求。一个小证明  $G(x)$  是  $F(x)$  的一个划分，因此对  $G(x)$  枚举它由几个  $F(x)$  构成，即

$$\$ \$ \begin{aligned} G(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^i(x)}{i!} \\ &\leq \mathrm{e}^{F(x)} \end{aligned} \$ \$$$

利用该性质可以极大化简某些过程。

## 参考资料

- [生成函数简介 - \\_rqy's Blog](#)

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:nikkukun:generating-function&rev=1596794872](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:nikkukun:generating-function&rev=1596794872)

Last update: 2020/08/07 18:07

