

生成函数

本文主要做一个归纳性的总结。

常见的生成函数形式：

- 普通型生成函数 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$
- 指数型生成函数 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$

普通型生成函数

形式幂级数 $\sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i = \frac{1}{1-ax}$ 并不太关注 x 的取值是否使得式子收敛。给出一些常用生成函数的封闭形式：

- 完全背包生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^{ai} = \frac{1}{1-x^a}$$

- 不知道什么的生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i = \frac{1}{1-ax}$$

- 二项式形式的生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

- 广义二项式定理的生成函数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i = \frac{1}{(1-x)^n}$$

令：扩展组合数为 $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ 这个展开就可以验证了。带入二项式定理中可以得到广义二项式定理（见上）。

普通型生成函数与可逆背包

一个非常棒的可逆背包题：2018 沈阳 ICPC 现场 M 题。

$$\sum_{i=0}^n x^{ai} = \frac{1-(x^a)^{n+1}}{1-x^a}$$

上面是个负方案的 01 背包，下面是个完全背包，没了。

指数型生成函数

一些常见的指数型生成函数化简技巧：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$x\}^2$

这个性质可以将生成函数化成封闭形式。反过来，也可以将封闭形式转化为级数形式：

$$\mathrm{e}^{ax} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i x^i}{i!}$$

注意因为是求排列，所以一般最后要乘一个 $n!$

指数型生成函数与集合划分

考虑一些具有性质 A 的东西的指数型生成函数 $F(x)$ 。现在把 A 里面的东西当成基本元素，像选物品一样合在一起获得具有 B 性质的东西（也就是 B 是几个 A 属性的东西拼成的），且 B 的生成函数是 $G(x)$ 。则

$$G(x) = \mathrm{e}^{F(x)}$$

例子 1 令 $F(x)$ 为 n 个点的无向连通图个数， $G(x)$ 为 n 个点的任意图数量（且显然 $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\binom{i-1}{2}} x^i$ ）因此 $F(x) = \ln G(x)$

例子 2 令 $F(x)$ 为 n 个点的连通 DAG 个数， $G(x)$ 为不要求连通的 n 个点的 DAG 个数，显然这也同样满足集合划分要求。一个小证明： $G(x)$ 是 $F(x)$ 的一个划分，因此对 $G(x)$ 枚举它由几个 $F(x)$ 构成，即

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^i(x)}{i!} \quad \&= \mathrm{e}^{F(x)} \end{aligned}$$

利用该性质可以极大化简某些过程。

参考资料

1. [生成函数简介 - _rqy's Blog](#)

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:nikkukun:generating-function&rev=1596795032

Last update: 2020/08/07 18:10