

# 保序回归问题

本文作为一个总结性质的东西，不涉及具体的证明，详细请参阅参考资料部分的论文。

## 序列上的保序回归问题

对给定的数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  找到一个非降序列  $b_1, b_2, \dots, b_n$  使得

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^n w_i |a_i - b_i|^p, \quad p \in \mathbb{N}_+$$

其中  $p$  是一个定值，并称其为  $L_p$  问题。

对问题的一个感性理解：将位置  $i$  的数增加或减少  $\Delta x$  所需代价是  $w_i (\Delta x)^p$  求让整个数列非降的最小代价。

一些规定：

定义 1 对序列的一个子区间  $[l, r]$  使  $\sum_{i=l}^r w_i |a_i - k|^p$  最小的  $k$  称为该区间的  $L_p$  均值。

这是说当  $[l, r]$  区间都只能取同一个值时，将  $b_i$  全部设为  $L_p$  均值是最优的。

### $L_1$ 问题

引理 1 对于  $w_i \equiv 1$  的情况  $L_1$  均值是区间的中位数。

经典结论，在数轴上画一下可以得到。

引理 2 若区间中  $a_l \leq a_{l+1} \leq \dots \leq a_r$  则取  $b_i = a_i$  是最优的。

引理 3 若区间中  $a_l \geq a_{l+1} \geq \dots \geq a_r$  则取  $b_i = L_1$  均值是最优的。

因此，序列可以划分为多个非升子序列，将每个子序列都修改为区间中位数即可。若此时仍然存在两个相邻区间不满足非降，则可以将这两个区间合并为一个区间，并将其中位数设为该区间新的  $L_1$  均值赋值，直到所有区间都满足非降，用栈就能做。

可以证明这样的结果是最优的。通常的实现过程是用大根堆维护区间的一半向上取整的元素，堆顶即为中位数，这样操作的正确性在此略去。如果你想要更直观的正确性，可以用平衡树 + 启发式合并，但会多一个  $O(\log n)$

### $L_2$ 问题

引理 4  $L_2$  均值是区间的加权平均数。

对  $L_2$  的式子求导即可得到。

引理 5 若区间中  $a_l > a_{l+1} > \dots > a_r$  则最优解满足  $b_l = b_{l+1} = \dots = b_r$

证明见论文。这指引我们可以像  $L_1$  问题一样，当某两个区间的  $L_2$  均值不满足非降时，就合并两个区间，同时重新计算  $L_2$  均值赋值。直到所有区间都满足非降。

## 例子

### BOI2004 Sequence

$L_1$  问题模板题，注意要求  $x_{i+1} > x_i$  则令  $x'_i = x_i - i$  就变成了  $x'_{i+1} \geq x'_i$  的条件。

### Petrozavodsk Winter 2020. Day 5. Jagiellonian U Contest C - Bookface

题面与题解 见此。要求  $x_{i+1} - x_i \geq d$  则令  $x'_i = x_i - i \cdot d$  就变成了  $x'_{i+1} \geq x'_i$  的条件。

## 参考资料

- 《浅谈保序回归问题》 - 高睿泉，国家集训队 2018 论文集
- 《左偏树的特点及其应用》 - 黄源河，国家集训队 2005 论文集

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:nikkukun:isotonic\\_regression&rev=1595255195](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:nikkukun:isotonic_regression&rev=1595255195)

Last update: 2020/07/20 22:26