

# 莫比乌斯反演

## 积性函数

来我们写一下这个部分.....（虚晃一枪）啊好，没写呢

数论函数是一类定义域在正整数上的函数。若对数论函数  $f$  且  $\forall a, b$  使得  $(a, b) = 1$  都满足

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

则称  $f$  是积性函数。如果条件弱一些，不需要  $(a, b) = 1$  也有上式成立，则称  $f$  是完全积性函数。只要  $f$  是一个积性函数，同时能够快速求出  $f$  在质数  $p$  幂次上的取值  $f(p^a)$  那么就可以用线筛求  $f$

## 性质

若  $f, g$  都是积性函数，则以下函数也是积性函数：

$$h(x) = f(x^p) \quad h(x) = f^p(x) \quad h(x) = f(x)g(x) \quad h = f * g$$

## 常见积性函数

定义符号

$$[expr] = \begin{cases} 1, & \text{expr is true} \\ 0, & \text{expr is false} \end{cases}$$

- 单位函数  $\varepsilon(n) = [i = 1]$
- 恒等函数  $\mathrm{id}(n) = i$  下文中一般会直接用  $n$  代替。
- 常数函数  $1(n) = 1$  下文中一般会直接用  $1$  代替。
- 欧拉函数  $\varphi(n) = \sum_{1 \leq i \leq n} [\gcd(i, n) = 1]$
- 约数函数  $d(n) = \sum_{d \mid n} 1$
- 约数和函数  $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$

## 狄利克雷卷积

来我们写一下这个部分.....（虚晃一枪）啊好，没写呢

对数论函数  $f, g$  定义它们的狄利克雷卷积

$$(f \times g)(n) = \sum_{d \mid n} f(n) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

## 性质

狄利克雷卷积满足：

- 交换律
- 结合律
- 分配律
- 单位元

同时，两个积性函数的狄利克雷卷积还是积性函数。

## 常用狄利克雷卷积关系

一个常用的卷积式子  $\varphi \times 1$  简单证明如下：

首先枚举约数，每个约数求出小于他且与他互质的个数，即求这个约数为分母的真分数个数，它们的和必为  $n$  例如  $n = 12$  时的真分数有

$$\frac{1}{12} \frac{2}{12} \frac{3}{12} \frac{4}{12} \frac{5}{12} \frac{6}{12} \frac{7}{12} \frac{8}{12} \frac{9}{12} \frac{10}{12} \frac{11}{12} \frac{12}{12}$$

可以化简为

- $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$   $\varphi(12)=4$
- $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$   $\varphi(6)=2$
- $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$   $\varphi(4)=2$
- $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$   $\varphi(3)=2$
- $\frac{12}{12}$   $\varphi(2)=1$
- $\frac{11}{12}$   $\varphi(1)=1$

## 整数格上的莫比乌斯反演

### 莫比乌斯函数

莫比乌斯反演是偏序集上的一个反演，不过在此处我们只讨论整数格上的莫比乌斯反演。

定义莫比乌斯函数  $\mu(n)$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^m, & n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}, \prod_{i=1}^m k_i = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mu(n)$  有两个性质：

- $\mu$  是积性函数。
- $\sum_{d|n} \mu(d) = [n=1]$

第一条性质说明  $\mu(n)$  可以线性筛；第二条性质提供了我们一个当且仅当  $n = 1$  时计数的函数，因此在遇到对  $\gcd(i, j) = 1$  的计数问题中通常会用到它。

直接给出代码。

```
void InitMu() {
    mu[1] = 1;
```

```

for (int i = 2; i < N; i++) {
    if (!notPri[i]) pri[siz++] = i, mu[i] = -1;
    for (int j = 0; j < siz && i * pri[j] < N; j++) {
        int nxt = i * pri[j];
        notPri[nxt] = 1;
        if (i % pri[j])
            mu[nxt] = -mu[i];
        else {
            mu[nxt] = 0;
            break;
        }
    }
}
}
}

```

当出现平方因子就退出筛法保证了每个数只会被最小的因子筛去，因此时间复杂度线性。\$\mu(i) = 0\$ 的情况是由最小因子筛掉的，而其他情况都是由 \$\mu(i) = -\mu(j)\$ 得到的。

## 莫比乌斯反演

若函数 \$f(n)\$ 与 \$g(n)\$ 为数论函数，且满足 \$g = f \times 1\$ 则 \$f = g \times \mu\$ 一种理解的方法如下：

狄利克雷卷积中，\$1\$ 的逆是 \$\mu\$ 即 \$\varepsilon = 1 \times \mu\$ 这很容易理解：对 \$(\mu \times 1)(n)\$ 作出贡献的仅有 \$n\$ 的质因数的乘积和 \$1\$。

对于 \$n\$ 的质因数，如果 \$n\$ 有 \$m \geq 1\$ 个质因数，那它就有 \$m\$ 个“一个质因数的积” \$\sum\_{C\_m^2}\$ 个“两个质因数的积……他们卷起来的和是

$$(-1) \cdot \binom{m}{1} + (-1)^2 \cdot \binom{m}{2} + \dots + (-1)^m \cdot \binom{m}{m} = [1 + (-1)]^m - 1$$

加上 \$1\$ 的贡献，即为 \$0\$。所以只有当 \$n=1\$ 的时候 \$(\mu \times 1)(n)\$ 才为 \$1\$，故 \$\varepsilon = 1 \times \mu\$

给出一些常用反演：

- \$\varepsilon = \mu \times 1\$
- \$n = \varphi \times 1 \iff \varphi = n \times \mu\$

## 应用

### 二维GCD计数前缀和

给定 \$n, m, k\$ 求 \$\sum\_{i=1}^n \sum\_{j=1}^m [\gcd(i,j) = k]\$

## 不使用函数变换的方法

不难发现：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i,j)=k] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[ \left( \frac{ik}{jk} = 1 \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{g|(i,j)} \mu(g) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{g|\text{lcm}(i,j)} \mu(g) \\ &= \sum_{g=1}^n \sum_{i=1}^{\lfloor n/g \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor m/g \rfloor} \mu(g) \\ &= \sum_{g=1}^n \mu(g) \sum_{i=1}^{\lfloor n/g \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor m/g \rfloor} 1 \end{aligned}$$

而  $\lfloor n/g \rfloor$  只有不超过  $\sqrt{n}$  种取值， $\lfloor m/g \rfloor$  和  $\lfloor n/g \rfloor$  只有不超过  $\sqrt{n} + \sqrt{m}$  种取值，因此可以将  $[1, n]$  分成  $\sqrt{n} + \sqrt{m}$  块，每一块的  $\lfloor n/g \rfloor$  和  $\lfloor m/g \rfloor$  取值都不变，则我们预处理  $\mu$  后可以对一块区间进行  $\mathcal{O}(1)$  的统计，总时间复杂度为  $\mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{m})$

## 使用函数变换的方法

令  $f(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i,j)=k]$ ， $g(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [k \mid (i,j)]$  则  $f(k)$  就是我们要求的答案。很明显  $k \mid (i,j) \iff k \mid i \text{ 且 } k \mid j$  因此  $g(k) = \lfloor n/k \rfloor \lfloor m/k \rfloor$

发现  $g(k) = \sum_{d=1}^{\lfloor n/k \rfloor} f(d \times k)$  因此有：

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{d=1}^{\lfloor n/k \rfloor} g(d \times k) \mu(d) \\ &= \sum_{d=1}^{\lfloor n/k \rfloor} \lfloor n/dk \rfloor \lfloor m/dk \rfloor \mu(d) \end{aligned}$$

令  $n' = \lfloor n/k \rfloor, m' = \lfloor m/k \rfloor$  则

$$f(k) = \sum_{d=1}^{\lfloor n/k \rfloor} \lfloor n'/d \rfloor \lfloor m'/d \rfloor \mu(d)$$

类似上面可以证明  $n', m'$  的取值个数，因此求解也是  $\mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{m})$  的。

好了，那求了一个区间后，怎么寻找下一个区间？假设我们当前区间开头为  $i$  并假设下一个区间为  $j$  则：

$$\lfloor n'/i \rfloor \leq \lfloor n'/j \rfloor \iff \lfloor n'/i \rfloor \leq \lfloor n'/j \rfloor \iff j \leq \lfloor n'/\lfloor n'/i \rfloor \rfloor$$

同理可得  $m'$  因此  $j = \min(\lfloor n'/\lfloor n'/i \rfloor \rfloor, \lfloor m'/\lfloor m'/i \rfloor \rfloor)$  这个技巧在很多莫比乌斯反演的题目都用得上。

## 求约数个数和

直接给出结论：

$$d(ij) = \sum_{x|i} \sum_{y|j} [(x, y) = 1]$$

以下给出一个简单的证明：

上式显然先决定  $x$  的取值，再决定  $y$  的取值。对于一个因子  $p$  若  $p^a | i, p^b | j$  且  $p^{a+b} | ij$  则

- $p^0 | x$  则表示  $y$  可以任意选  $p^1, \dots, p^b$  等因子，分别对应因数  $d | p^{a+1}, d | p^{a+2}, \dots, d | p^{a+b}$
- $p^1 | x, p^2 | x, \dots, p^a | x$  则表示  $x$  可以任意选  $p^1, \dots, p^a$  等因子，分别对应因数  $d | p^1, d | p^2, \dots, d | p^a$
- $x = 1, y = 0$  则表示因数  $1$ 。

综上，因子  $p^0, p^1, \dots, p^{a+b}$  都能被唯一地表示出来且一一对应（双射），因此等式成立。

然后还有个推广的神奇大结论：

$$\sum_{x_1}^{y_1} \sum_{x_2}^{y_2} \cdots \sum_{x_k}^{y_k} d(x_1 x_2 \cdots x_k) = \sum_{x_1}^{y_1} \sum_{x_2}^{y_2} \cdots \sum_{x_k}^{y_k} \prod_{i=1}^k \left\lfloor \frac{y_i}{x_i} \right\rfloor \prod_{i < j} [(x_i, x_j) = 1]$$

太神奇，证明需要二重数学归纳，略过。

## 练习

莫比乌斯的题目通常能转化为  $(i, j) = 1$  的计数问题，而转化为计数问题我们就容易通过分块求解了。

### POI2007 Zap

二维 GCD 计数前缀和。

### HAOI2011 Problem b

POI2007 Zap 的加强版，容斥原理加加减减就好了。

### BZOJ2820 YY的GCD

仍然是二维 GCD 计数前缀和，不过需要  $(i, j)$  为质数。只要预处理质数的  $\mu$  前缀和就好了。

### SDOI2008 仪仗队

不被挡住即行列  $(i, j) = 1$  (从  $(0, 0)$  标号)，因此答案为  $(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(i, j) = 1]) + 2$  (个是  $(0, 1), (1, 0)$ )。最终化为  $(\sum_{g=1}^n \mu(g) \lfloor n/g \rfloor^2) + 2$  分块求解。

## SDOI2015 约数个数和

是道好题，然而需要结论。

令  $n' = \frac{n}{g}$   $m' = \frac{m}{g}$  则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(ij) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i,j)=1] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{j} \right\rfloor \\ &= \sum_{g=1}^{\min(n,m)} \mu(g) \sum_{i=1}^{\lfloor n/g \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor m/g \rfloor} \frac{n}{ig} \frac{m}{jg} \\ &= \sum_{g=1}^{\min(n,m)} \mu(g) \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m'} \frac{n'}{i} \frac{m'}{j} \end{aligned}$$

然后就可以预处理  $f(n) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i}$  的值，每次询问就可以分块解决。之所以要预处理  $f(n)$  是因为在倒数第二步时如果采用直接计算  $\sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m'} \frac{n'}{i} \frac{m'}{j}$  开销是很大的。但如果我们能预处理，就能做到  $\mathcal{O}(1)$  计算。

预处理时间复杂度  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$  单次询问时间复杂度  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$

## HNMTC2015#5 Lucas的数论

发现是 SDOI2015 约数个数和的单询问加强版本，上面对  $\mu$  前缀和的  $\mathcal{O}(n)$  时间复杂度已经不能满足我们了，因此我们需要用杜教筛求出  $\mu(n)$  前缀和，在  $\mathcal{O}(n^{2/3})$  时间内完成计算。

## 总结

莫比乌斯反演基本上离不开 GCD 和两个累和符号，而且通常通过将式子化为  $\varepsilon(n)$  的形式，进而反演成  $\mu(n)$  并提出相关变量的形式，简化式子进行计算。求解一般通过数论分块和预处理  $\mu(n)$  前缀和的方式在  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  时间内求和。

- $\varepsilon = \mu \times 1$   $\varphi = \mu \times 1$
- 当待分块函数（如  $\mu$ ）可以单独提出预处理时，可以通过此降低时间复杂度。
- 若多次询问中，分块区域下含有 GCD 的枚举值  $g$  和  $i$  或  $j$  之一，可以通过更换枚举变量改为枚举  $ig$  或  $jg$  的值，再枚举  $g$  加速。（说法很意识流，详见莫比乌斯反演简要笔记 - GCD的幂）
- 积性函数有时不好证明，可以打表观察。重点观察幂和质数的值。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i\\_dont\\_know\\_png:nikkukun:mobius\\_inversion&rev=1589125299](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:i_dont_know_png:nikkukun:mobius_inversion&rev=1589125299)

Last update: 2020/05/10 23:41